

SÉRIE A, N° 2877

N° D'ORDRE : 3749

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

Bernard SAINT-GUILY

1^{re} THÈSE. — Théorie des courants marins induits par le vent.

2^e THÈSE. — Propositions données par la Faculté.

Soutenues le 14 décembre 1955, devant la Commission d'examen.

MM. J. PÉRÈS, *Président.*

THIRY, }
FORTIER, } *Examineurs.*

MASSON & C^{ie}, ÉDITEURS
LIBRAIRES DE L'ACADÉMIE DE MÉDECINE
120, BOULEVARD SAINT-GERMAIN, PARIS (VI^e)

1956



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547107_0041

SÉRIE A, N° 2877

N° D'ORDRE : 3749

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

Bernard SAINT-GUILY

1^{re} THÈSE. — Théorie des courants marins induits par le vent.

2^e THÈSE. — Propositions données par la Faculté.

Soutenues le 14 décembre 1955, devant la Commission d'examen.

MM. J. PÉRÈS, *Président.*

THIRY, }
FORTIER, } *Examineurs.*

MASSON & C^{ie}, ÉDITEURS
LIBRAIRES DE L'ACADÉMIE DE MÉDECINE
120, BOULEVARD SAINT-GERMAIN, PARIS (VI^e)

1956

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

Dogen..... J. PÉRÈS.

PROFESSEURS

G. JULIA.....	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.	JANET	T	Méc. anal. et méc. céleste.
E. DARMOIS ..	T	Enseignement de Physique.	PETIT	T	Biologie maritime.
ROBERT LÉVY..	T	Physiologie comparée.	QUENEY	T	Météorologie et Dynamique atmosphérique.
FOCH	T	Mécan. phys. et expér.	GALLIEN	T	Embryologie.
PAUTHENIER ..	T	Electrotechnique générale.	EICHHORN	T	Biologie végétale (P. C. B.).
DE BROGLIE ..	T	Théories physiques.	DE CUGNAC ...		Biologie végétale (P. C. B.).
JOB	T	Chimie générale.	M ^{lle} CAUCHOIS..	T	Chimie-Physique.
PRENANT	T	Anat. et Histol. comp.	THELLIER	T	Physique du globe.
GARNIER	T	Géométrie supérieure.	AUDUBERT	T	Electrochimie.
PÉRÈS	T	Mécanique des fluides et applications.	L'HÉRITIER ...	T	Génétique.
LAUGIER	T	Physiologie générale.	GRIVET	T	Radio-Electricité.
M. CURIE	T	Physique (P. C. B.).	PONCIN	T	Mécanique des fluides.
BARRABÉ	T	Géologie structurale et Géologie appliquée.	THIRY	T	Mécanique appliquée.
G. DARMOIS ..	T	Calcul des probabilités et Physique mathématique.	DUBREIL	T	Mathématiques générales.
Jacques BOURCART...	T	Géographie physique et Géologie dynamique.	QUELET	T	Chimie organique.
M ^{me} JOLIOT-CURIE...	T	Physique nucléaire et Radioactivité.	CAGNIARD	T	Géophysique appliquée.
PLANTEFOL ...	T	Botanique.	CHAMPETIER ..	T	Chimie macromoléculaire.
CABANNES	T	Recherches physiques.	CUVILLIER	T	Géologie structurale et Géologie appliquée.
GRASSÉ	T	Evol. des êtres organisés.	JUNG	T	Pétrographie.
PRÉVOST	T	Chimie organique.	TRILLAT	T	Chimie physique.
BOULIGAND ...	T	Application de l'analyse à la Géométrie.	WIEMANN	T	Chimie (M. P. C.).
CHAUDRON ...	T	Chimie appliquée.	JACQUINOT ...	T	Spectroscopie et physique céleste.
WYART	T	Minéralogie.	VASSY		Physique de l'atmosphère
TEISSIER	T	Zoologie.	DESTOUCHES...		Théories physiques.
MANGENOT	T	Biologie végétale.	M. PRUVOST... T		Géologie.
P. AUGER	T	Physique quantique et relativité.	AMIEL	T	Chimie (P. C. B.).
MONNIER	T	Physiol. des fonctions.	HOCART	T	Minéralogie.
PIVETEAU	T	Géologie.	J.-P. MATHIEU..	T	Physique (P. C. B.).
ROCARD	T	Physique (E. N. Sup.).	COUTEAUX	T	Biologie animale (P. C. B.).
H. CARTAN ...	T	Mathématiques (E.N.Sup.).	MAY		Biologie animale (P.C.B.)
LAFFITTE	T	Chimie générale.	CHOSQUET	T	Calc. diff. et intégral.
FAVART	T	Mécanique générale.	FELDMANN		Biologie (P. C. B.).
COULOMB	T	Physique du globe.	GUINIER	T	Physique (P. C. B.).
M ^{lle} COUSIN...	T	Biol. anim. (P. C. B.).	JOST	T	Biologie (P. C. B.).
CHRÉTIEN	T	Chimie minérale.	FORTET	T	Calc. des probabilités.
DRACH	T	Zoologie.	SCHWARTZ ...	T	Méth. Math. de la Phys.
KASILER	T	Physique.	CHOUARD	T	Physiologie végétale.
EPHRUSSI	T	Génétique.	MALAVARD	T	Aviation.
WURMSER	T	Biologie phys.-chimique.	BRELOT	T	Calcul différentiel.
RIVIÈRE	T	Géologie (S. P. C. N.).	NORMANT	T	Chimie (P. C. B.).
GAUTHERET ...	T	Biol. végét. (P. C. B.).	BÉNARD		Chimie (P. C. B.).
LUCAS	T	Physique.	BUVAT		Botanique (E. N. S.).
A. THOMAS...	T	Biologie cellulaire.	DUGUÉ	T	Statistiques mathémat.
ARNULF	T	Optique appliquée.	GELOSO		Chimie (S. P. C. N.).
MAX MORAND..	T	Physique.	SOULAIRAC ...	T	Psychophysiologie.
SOLEILLET	T	Physique.	ULRICH	T	Physiologie végétale.
FORTIER	T	Mécan. expér. des fluides.	MARÉCHAL ...	T	Optique théor. et appl.
DANJON	T	Astronomie.	KIRRMANN	T	Théories chimiques.
FROMAGEOT ..	T	Chimie biologique.	CHADEFAUD ...		Botanique.
LAPORTE	T	Physiq. génér. et Radio-activité.	DESTRIAU		Physique (M. P. C.).
			M ^{lle} LE BRETON..		Physiologie générale.
			SALEM		Mathématiques générales.
			ESCLANGON ...	T	Physique (P. C. B.).
			LELONG	T	Mathématiques générales.

Secrétaire général..... C. MONIER.

SUR LA THÉORIE
DES COURANTS MARINS
INDUITS PAR LE VENT

PAR

BERNARD SAINT-GUILY
Institut Océanographique, Paris.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION	2
I. — EQUATIONS ET OPÉRATEURS DE LA DYNAMIQUE DES FLUIDES EN MOUVEMENT TURBULENT DANS UN SYSTÈME DE COORDONNÉES CURVILIGNES	5
II. — CHOIX D'UN TENSEUR. CONDITIONS AUX FRONTIÈRES. ENERGIE D'UN MOUVEMENT TURBULENT	11
III. — ETUDE DE QUELQUES CAS SIMPLES	15
Généralités (p. 15). — Océan rectangulaire (p. 17). — Océan circulaire (p. 20). — Influence de la force de Coriolis (p. 22).	
IV. — ETUDE DE LA CIRCULATION INDUITE PAR LE VENT DANS UN OCÉAN LIMITÉ PAR DEUX MÉRIDiens ET DEUX PARALLÈLES (OCÉANS ATLANTIQUE ET PACIFIQUE).....	25
V. — DÉNIVELLATIONS PRODUITES LE LONG DES CÔTES DE L'AMÉRIQUE DU NORD	38
VI. — CIRCULATION INDUITE PAR LE VENT DANS UN MODÈLE SIMPLE DE L'OCÉAN ANTARCTIQUE	43
VII. — ETUDE QUANTITATIVE DES REMONTÉES D'EAUX FROIDES	48

INTRODUCTION

La théorie des courants marins est encore loin d'être achevée. Elle se heurte à de nombreuses difficultés :

1° Le régime de ces courants est turbulent et la théorie des mouvements turbulents est encore embryonnaire.

2° Les courants océaniques sont complexes : ils sont régis par les vents, le champ de densité, les échanges thermiques et sont déterminés également par la rotation de la terre et la géométrie des frontières.

3° Ils sont sujets à des fluctuations dans le temps, qui sont importantes.

4° Leur faible intensité rend les mesures directes très difficiles.

Dans ce travail, nous nous sommes limité à l'étude des courants marins induits par les vents, c'est-à-dire des courants de « dérive ».

W. EKMAN, le premier (1905) [17]*, a édifié une théorie des courants de dérive en tenant compte de la rotation de la terre et d'une « viscosité turbulente » verticale. En 1936, C. G. ROSSBY [20] a introduit un coefficient de turbulence latérale. Puis la théorie a fait des progrès avec les travaux de H. V. SVERDRUP (1947) et R. O. REID (1948) [22, 24] sur le courant équatorial de l'Océan Pacifique, qui montrent que le vent est bien le moteur principal des courants marins. D'un autre côté, H. STOMMEL [25], dans une étude d'un modèle d'océan fermé rectangulaire, a montré que l'intensification Ouest des courants est due à la variation de l'accélération de Coriolis avec la latitude.

En 1950, W. H. MUNK [26] et K. HIDAKA [28] ont donné une théorie d'ensemble permettant de représenter l'aspect général de la circulation d'un océan fermé comparable à l'Océan Pacifique. W. H. MUNK a employé des coordonnées rectangulaires et intégré l'équation donnant la fonction de courant du transport de masse en supposant constants, le gradient suivant la latitude de la composante verticale de la vitesse angulaire de rotation de la terre et le coefficient latéral de turbulence l . K. HIDAKA a opéré en coordonnées sphériques, en admettant un coefficient l inversement proportionnel au cosinus de la latitude; il a ensuite obtenu la fonction de courant à l'aide d'un développement en série et d'une méthode de multiplicateurs entraînant des calculs assez longs.

W. H. MUNK et G. F. CARRIER [27] ont étendu leurs calculs à des modèles d'océan de forme triangulaire et étudié l'influence des termes non linéaires à l'aide d'une méthode de calcul de perturbation; il en résulte des changements dans l'aspect des lignes de courant, mais le transport de masse global est à peine modifié.

Enfin, K. HIDAKA [36] a donné un modèle de la circulation de l'Océan Antarctique, dans un système de coordonnées rectangulaires, en faisant intervenir les composantes horizontales de la vitesse elle-même et non le transport de masse.

L'origine des remontées d'eaux froides près d'une côte est claire depuis la théorie d'EKMAN. En écrivant que la somme du flux de courant de dérive et du flux de courant

* Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie.

de densité est nulle dans une direction normale à la côte, on obtient une relation entre la force d'entraînement du vent et la pente des lignes d'égale densité, ou isopycnes. P. NOMITSU [38, 39] a étudié systématiquement le genre de calculs auxquels conduit la théorie d'Ekman; et les études de H. V. SVERDRUP [41] ont montré que les eaux remontant à la surface proviennent de profondeurs n'excédant pas 200 à 300 m. Enfin, K. HIDAOKA [45] a exposé récemment une méthode de calcul s'appliquant aux remontées d'eaux froides. Dans celle-ci, il utilise l'intégrale de Fourier et tient compte de la circulation verticale et du frottement latéral. Il semble difficile d'obtenir une expression explicite des vitesses, sinon numériquement.

Il est évidemment impossible de décrire complètement par l'analyse les mouvements qui existent dans un océan réel, et il s'agit toujours de choisir des hypothèses simplificatrices et des modèles idéalisés qui permettent une résolution mathématique facile. C'est dans ce sens que nous avons cherché à améliorer la théorie des principaux effets des vents sur les mers, les grands courants océaniques, les remontées d'eaux froides et certaines modifications du niveau des mers.

Voici maintenant les hypothèses que nous avons faites :

1° Le mouvement est turbulent, il obéit aux équations de Reynolds, le fluide étant incompressible et sans viscosité.

2° Le tenseur des tensions dues à la turbulence est analogue à celui d'un fluide visqueux qui serait doué d'une certaine anisotropie; celle-ci se traduit par l'introduction de deux coefficients ou facteurs de turbulence, l'un vertical k , l'autre latéral l que l'on suppose constants.

3° Les effets de température n'interviennent pas; le fluide est homogène, de densité ρ constante et égale à l'unité. On tient compte cependant, d'une façon indirecte, des effets thermiques : premièrement dans les remontées d'eaux froides où l'on fait intervenir un champ de densité, deuxièmement lorsqu'il existe dans la réalité une thermocline, c'est-à-dire un maximum de gradient de densité à une certaine profondeur h constante (Atlantique, Pacifique); nous supposons alors le liquide divisé en deux couches de densités différentes, mais constantes, et nous étudions le mouvement de la couche supérieure, seul, en faisant l'hypothèse suivante : la densité de force tangentielle ou frottement est nulle sur la surface de séparation des deux liquides, c'est-à-dire à la profondeur h . Cette hypothèse est physiquement assez naturelle si l'on songe que la thermocline est une région de stabilité maxima, donc de turbulence relativement faible.

4° Le mouvement est permanent.

5° Nous utilisons un système de coordonnées sphériques, sauf pour l'étude des cas simples et des remontées d'eaux froides, puisqu'il s'agit de domaines relativement peu étendus. On tient compte de la force de Coriolis et de sa variation avec la latitude dans l'étude de la circulation de l'Atlantique; dans celle des remontées d'eaux froides et de l'Antarctique, on suppose la force de Coriolis constante.

6° Les termes non linéaires sont négligés. D'autre part, dans l'équation du mouvement vertical, les termes de l'accélération verticale sont également laissés de côté, ainsi que ceux dus à la turbulence; on admet donc que la pression se réduit à la pression hydrostatique. On tient compte de la composante verticale de la vitesse, sauf pour la circulation de l'Océan Atlantique, qui est étudiée par la méthode du transport de masse (mouvement à deux dimensions).

7° Comme conditions aux frontières, nous utilisons, outre les conditions cinématiques habituelles, une des trois suivantes :

I. Le vecteur vitesse est nul sur la frontière, il y a donc frottement sur celle-ci.

II. La projection sur le plan tangent à la surface frontière de la force tangentielle est nulle sur cette surface frontière, il n'y a pas de frottement.

III. Il existe une couche limite turbulente dans laquelle est valable une certaine relation entre la force tangentielle et le vecteur vitesse. Cette relation fournit une condition pour une frontière qui est celle de la couche limite.

Ces hypothèses et simplifications étant admises, nous pouvons donner rapidement le plan et les résultats de ce travail.

Dans les deux premiers chapitres, qui sont des préliminaires, nous rappelons l'expression d'un certain nombre d'opérateurs différentiels en coordonnées sphériques, en particulier celle de la divergence d'un tenseur. Puis nous indiquons la forme du tenseur de turbulence, les conditions aux frontières et une relation énergétique qui seront utiles pour la suite.

Dans le troisième chapitre, nous exposons des solutions à variables séparées pour des domaines simples (rectangulaires et circulaires), ce qui permet de mettre en évidence l'action de la force de Coriolis et du frottement latéral, ainsi que les paramètres caractérisant le mouvement.

Le chapitre suivant est consacré à l'étude de la circulation globale de l'Océan Atlantique. Le modèle de l'Atlantique est limité par deux méridiens et deux parallèles, et l'équation donnant la fonction de courant est intégrée par une méthode simple de calcul de perturbation, le coefficient latéral l étant supposé constant. Dans le cinquième chapitre, nous obtenons pour la dénivellation une solution en excellent accord avec les observations faites le long des côtes de l'Amérique du Nord.

Nous considérons ensuite un modèle de l'Océan Antarctique limité par deux parallèles. Nous montrons que la théorie du transport de masse est ici insuffisante, qu'il faut tenir compte de la circulation verticale et opérer en coordonnées sphériques. En admettant pour le coefficient de turbulence l la valeur $5,10^7$ C. G. S., on obtient des résultats de l'ordre de grandeur des estimations déduites de l'observation.

Dans le dernier chapitre, nous étudions, moyennant une schématisation convenable (domaine du genre canal), la circulation horizontale et verticale dans les remontées d'eaux froides. Nous montrons que cette circulation est très peu modifiée si l'on adopte un coefficient vertical de turbulence variable avec la profondeur, au lieu d'un coefficient constant, mais que l'influence d'un champ de densité est importante. Puis nous mettons en évidence les paramètres caractérisant le mouvement, en particulier l'action relative de la force de Coriolis et du frottement latéral.

Ce travail a été effectué grâce à M. LE GRAND, à ses encouragements et à son exemple. Je lui exprime ici mon affectueuse reconnaissance pour tout ce que je lui dois.

Je dois aussi beaucoup à M. FORTIER, dont les conseils m'ont permis de mener à bien mes recherches; je l'en remercie très vivement. Enfin, j'adresse ma respectueuse gratitude à M. PÉRÈS et à M. THIRY, qui se sont intéressés à mon travail avec beaucoup de bienveillance et de sympathie.

CHAPITRE PREMIER

ÉQUATIONS ET OPÉRATEURS DE LA DYNAMIQUE DES FLUIDES EN MOUVEMENT TURBULENT DANS UN SYSTÈME DE COORDONNÉES CURVILIGNES

1. — Forme vectorielle et tensorielle des équations de la dynamique des fluides.

Les courants océaniques sont des phénomènes dont l'échelle est celle du globe terrestre; il est donc naturel d'utiliser pour leur étude un système de coordonnées sphériques. Cela nécessite un travail préliminaire qui consiste à établir la forme des équations à employer pour un régime turbulent dans un tel système de coordonnées.

Les équations de l'hydrodynamique s'écrivent, pour un fluide incompressible, dans un système de coordonnées rectangulaires en rotation :

$$(1) \quad \frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_k v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + 2 \sum_k \omega_{ki} v_k = F_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + (\dots\dots);$$

$$(2) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_k) = 0;$$

les v_i représentent les composantes de la vitesse, les F_i celles des forces de masse, ρ la densité et p la pression. Les points entre parenthèse (...) représentent les termes dus à la viscosité; dans les océans, ils sont faibles devant ceux provenant de la turbulence; il est donc inutile d'en tenir compte ici.

La relation (1) peut se mettre sous une autre forme en utilisant l'équation de continuité (2) :

$$(3) \quad \frac{\partial (\rho v_i)}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_i v_k) + 2\rho \sum_k \omega_{ki} v_k = \rho F_i - \frac{\partial p}{\partial x_i}.$$

Pour tenir compte de l'action de la turbulence, on suppose que la vitesse fluctue à une échelle déterminée; puis on effectue une moyenne en négligeant les fluctuations de densité ρ devant celles des vitesses v_i . Pour cela posons :

$$(4) \quad v_i = u_i + \varepsilon_i;$$

$$(5) \quad \overline{v_i} = u_i; \quad \overline{\rho} = \rho;$$

(le trait horizontal signifiant moyenne de). Si on introduit dans les relations (2) et (3) la relation (4), et si on moyenne, on obtient les équations suivantes pour le mouvement moyen :

$$(6) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_i u_k) + 2\rho \sum_k \omega_{ki} u_k = \rho F_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} - \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\rho \overline{\varepsilon_k \varepsilon_i} \right);$$

$$(7) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial (\rho u_k)}{\partial x_k} = 0;$$

(6) peut s'écrire également :

$$(8) \quad \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_k u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + 2 \sum_k \omega_{ki} u_k = F_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \sum_k \frac{\partial T_{ki}}{\partial x_k};$$

$$(9) \quad T_{ki} = -\rho \overline{\varepsilon_i \varepsilon_k}.$$

Ce sont les équations de Reynolds qui diffèrent de celles d'un fluide parfait par l'apparition de forces de tension $\frac{1}{\rho} \sum_k \frac{\partial T_{ki}}{\partial x_k}$; le tenseur des tensions T_{ki} étant symétrique. Il est plus commode d'écrire les relations (7) et (8) sous forme vectorielle :

$$(10) \quad \frac{d\vec{u}}{dt} + 2 \vec{\Omega} \wedge \vec{u} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \frac{1}{\rho} \text{div } \vec{T};$$

$$(11) \quad \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \text{grad } \vec{u} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad } u^2 + \text{rot } \vec{u} \wedge \vec{u};$$

$$(12) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u}) = 0.$$

Ici $\vec{\Omega}$ désigne le tenseur gradient d'un vecteur (tenseur d'ordre deux) et div la divergence d'un tenseur d'ordre deux, c'est-à-dire un vecteur.

Maintenant nous allons passer à l'écriture tensorielle de ces équations, car elle permet d'obtenir très rapidement l'expression des différents opérateurs qui nous intéressent, en particulier la divergence d'un tenseur, pour un système de coordonnées curvilignes arbitraires.

Les relations (7) et (8) prennent alors la forme suivante :

$$(13) \quad \frac{\partial u^i}{\partial t} + u^k \nabla_k u^i + 2 u^k \omega^i_k = f^i - \frac{1}{\rho} g^{ik} \partial_k p + \frac{1}{\rho} \nabla_k t^{ki};$$

$$(14) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_k (\rho u^k) = 0;$$

∇_k désigne la dérivée covariante, ∂_k est une forme condensée de $\frac{\partial}{\partial y_k}$; t^{ki} et ω^i_k désignent des tenseurs respectivement contravariant symétrique et mixte antisymétrique; ils ont pour composantes en coordonnées rectangulaires :

$$\left\| \begin{array}{ccc} t^{11} & t^{21} & t^{31} \\ t^{12} & t^{22} & t^{32} \\ t^{13} & t^{23} & t^{33} \end{array} \right\| \quad \text{et} \quad \left\| \begin{array}{ccc} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{array} \right\|$$

$\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3$ désignant les composantes du vecteur rotation. Notons que l'on a, d'après la définition de la dérivée covariante :

$$(15) \quad \nabla_k u^i = \partial_k u^i + \Gamma^i_{kh} u^h;$$

$$(16) \quad \nabla_k t^{ki} = \partial_k t^{ki} + \Gamma^i_{kh} t^{kh} + \Gamma^k_{kh} t^{hi};$$

où Γ^i_{kh} désigne le symbole de Christoffel de deuxième espèce :

$$(17) \quad \Gamma^i_{kh} = \frac{1}{2} g^{il} [\partial_k g_{hl} + \partial_h g_{lk} - \partial_l g_{kh}].$$

2. — Coordonnées curvilignes orthogonales.

Rappelons un certain nombre de résultats du calcul tensoriel. On sait que dans un système de coordonnées curvilignes y_i l'élément linéaire ou métrique de l'espace rapporté à ce système est défini par :

$$(18) \quad ds^2 = g_{ij} dy^i dy^j = g^{ij} dy_i dy_j ;$$

g_{ij} et g^{ij} sont les composantes covariantes et contravariantes du tenseur fondamental.

Le repère naturel, associé au système de coordonnées curvilignes y_i , est composé de trois vecteurs $\vec{e}_i$, tels que :

$$(19) \quad \vec{e}_i = \frac{\partial \vec{s}}{\partial y^i} ;$$

et comme

$$(20) \quad d\vec{s} = \frac{\partial \vec{s}}{\partial y^i} dy^i ;$$

on a, d'après (18) :

$$(21) \quad g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j.$$

Pour un système orthogonal, il s'introduit un certain nombre de simplifications; en premier lieu, la forme quadratique ds^2 ne contient plus de termes rectangles; on a :

$$(22-23) \quad g_{ij} = 0 ; \quad i \neq j ; \quad g_{ii} = h_i^2 ; \quad g^{ii} = \frac{1}{h_i^2} ;$$

et si g désigne le déterminant des g_{ij} ;

$$(24) \quad \sqrt{g} = h_1 h_2 h_3 ;$$

deuxièmement, il est commode d'abandonner le repère naturel $\vec{e}_i$ pour un repère de vecteurs unité $\vec{i}_i$. Il en résulte donc que :

$$(25) \quad \vec{e}_i = h_i \vec{i}_i ; \quad \vec{e}^i = \frac{1}{h_i} \vec{i}_i ;$$

puis qu'un vecteur $\vec{F}$, qui avait comme composantes contravariantes et covariantes f^i et f_i définies par :

$$(26) \quad \vec{F} = f^i \vec{e}_i = f_i \vec{e}^i ;$$

a pour nouvelles composantes ou projections sur les $\vec{i}_i$, les F_i , telles que :

$$(27) \quad F_i = h_i f^i = \frac{1}{h_i} f_i ; \quad \vec{F} = F_i \vec{i}_i ;$$

de même, un tenseur $\vec{\vec{T}}$, qui avait pour composantes contravariantes, covariantes et mixtes respectivement t^{ki} , t_{ki} , t^k_i , a pour nouvelles composantes les T_{ki} , telles que :

$$(28) \quad T_{ki} = h_i h_k t^{ki} = \frac{1}{h_i h_k} t_{ki} = \frac{h_k}{h_i} t^k_i.$$

**3. — Expression de la divergence d'un tenseur
et d'un autre opérateur en coordonnées curvilignes orthogonales.**

On obtient facilement à l'aide des relations (16) (17) (22-23), et sachant que :

$$(29) \quad \frac{1}{2} g^{ij} \partial_k g_{ij} = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_k \sqrt{g} ;$$

$$(30) \quad \vec{\text{div}} T = \vec{e}_j \left[\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_k (\sqrt{g} t^{kj}) + \frac{1}{2h_j^2} (t^{kj} + t^{jk}) \partial_k (h_j^2) - \frac{1}{2h_j^2} t^{kk} \partial_j (h_j^2) \right] ;$$

puis, à l'aide des relations (27) et (28) :

$$(31) \quad \begin{aligned} \vec{\text{div}} T = \vec{i}_1 \left\{ \frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} T_{11} \right) + \frac{\partial}{\partial y_2} \left(h_3 T_{21} \right) + \frac{\partial}{\partial y_3} \left(h_3 T_{31} \right) \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{h_1} \left[\frac{2 T_{11}}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} + \frac{(T_{21} + T_{12})}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial y_2} + \frac{(T_{31} + T_{13})}{h_3} \frac{\partial h_1}{\partial y_3} \right] \right. \\ \left. - \frac{1}{h_1} \left[\frac{T_{11}}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} + \frac{T_{22}}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial y_1} + \frac{T_{33}}{h_3} \frac{\partial h_3}{\partial y_1} \right] \right\} \\ + \vec{i}_2 \left\{ \dots \dots \dots \right\} + \vec{i}_3 \left\{ \dots \dots \dots \right\} . \end{aligned}$$

Soit finalement :

$$(32) \quad \begin{aligned} \vec{\text{div}} T = \vec{i}_1 \left\{ \frac{1}{h_1} \left[\frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial y_1} (T_{11} h_2 h_3) - \frac{T_{22}}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial y_1} - \frac{T_{33}}{h_3} \frac{\partial h_3}{\partial y_1} \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{h_2} \left[\frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial}{\partial y_2} (T_{21} h_1 h_3) + \frac{T_{12}}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y_2} \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{h_3} \left[\frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial y_3} (T_{31} h_1 h_2) + \frac{T_{13}}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y_3} \right] \right\} \\ + \vec{i}_2 \left\{ \dots \dots \dots \right\} + \vec{i}_3 \left\{ \dots \dots \dots \right\} ; \end{aligned}$$

les termes non écrits entre crochets s'obtiennent par permutation circulaire des indices 1, 2, 3.

Donnons maintenant l'expression d'un autre opérateur qui nous sera utile : c'est celle de la composante covariante d'un tenseur qui est la dérivée covariante d'un vecteur :

$$(33) \quad \nabla_k f_i = \partial_k f_i - \Gamma_{ki}^h f_h ;$$

on a donc pour $k \neq i$:

$$(34) \quad \nabla_k f_i = - \frac{1}{2h_i^2} f_i \partial_k (h_i^2) - \frac{1}{2h_k^2} f_k \partial_i (h_k^2) ;$$

et finalement :

$$(35) \quad \frac{1}{h_i h_k} \nabla_k f_i = \frac{1}{h_k} \frac{\partial F_i}{\partial y_k} - \frac{F_k}{h_i h_k} \frac{\partial h_k}{\partial y_i} ;$$

$$(36) \quad \nabla_i f_i = \partial_i f_i - \sum_m \Gamma_{ii}^m f_m - \Gamma_{ii}^i f_i ;$$

Σ'_m signifie somme pour $m \neq i$, puis :

$$(37) \quad \nabla_i f_i = h_i \partial_i \left(\frac{f_i}{h_i} \right) + \Sigma'_m \frac{h_i f_m}{h_m^2} \partial_m h_i ;$$

soit :

$$(38) \quad \frac{1}{h_i^2} \nabla_i f_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial F_i}{\partial y_i} + \Sigma'_m \frac{F_m}{h_i h_m} \frac{\partial h_i}{\partial y_m} .$$

Dans le cas particulier des coordonnées rectangulaires, on a $h_1 = h_2 = h_3 = 1$ et les expressions (32) (35) et (38) se réduisent à :

$$(39) \quad \begin{aligned} \text{div } \vec{T} = \vec{i}_1 \left\{ \frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{31}}{\partial x_3} \right\} \\ + \vec{i}_2 \left\{ \frac{\partial T_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{32}}{\partial x_3} \right\} + \vec{i}_3 \left\{ \frac{\partial T_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{33}}{\partial x_3} \right\} ; \end{aligned}$$

$$(40) \quad \nabla_k f_i = \frac{\partial F_i}{\partial x_k} ;$$

$$(41) \quad \nabla_i f_i = \frac{\partial F_i}{\partial x_i} .$$

4. — Expression des principaux opérateurs différentiels en coordonnées sphériques.

Rappelons d'abord la forme des opérateurs gradient, divergence, rotationnel et laplacien en coordonnées curvilignes orthogonales. Φ désignera une fonction scalaire, $\vec{F}$ un vecteur.

$$(42) \quad \text{grad } \Phi = \vec{e}_i g^{ik} \partial_k \Phi = \Sigma_j \frac{1}{h_j} \frac{\partial \Phi}{\partial y_j} \vec{i}_j ;$$

$$(43) \quad \begin{aligned} \text{div } \vec{F} = \nabla_i f^i = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i \left(\sqrt{g} f^i \right) \\ = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial y_1} (h_2 h_3 F_1) + \frac{\partial}{\partial y_2} (h_1 h_3 F_2) + \frac{\partial}{\partial y_3} (h_1 h_2 F_3) \right] ; \end{aligned}$$

$$(44) \quad \begin{aligned} \Delta \Phi = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i \left[\sqrt{g} g^{ij} \partial_j \Phi \right] \\ = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} \right) + \frac{\partial}{\partial y_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial \Phi}{\partial y_2} \right) + \frac{\partial}{\partial y_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \Phi}{\partial y_3} \right) \right] ; \end{aligned}$$

$$(45) \quad \begin{aligned} \text{rot } \vec{F} = \vec{e}_i \wedge \vec{e}_j (\partial_j f_i - \partial_i f_j) = \vec{i}_1 \frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial y_2} (h_3 F_3) - \frac{\partial}{\partial y_3} (h_1 F_2) \right] \\ + \vec{i}_2 \frac{1}{h_3 h_1} \left[\frac{\partial}{\partial y_3} (h_1 F_1) - \frac{\partial}{\partial y_1} (h_3 F_3) \right] + \vec{i}_3 \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial y_1} (h_2 F_2) - \frac{\partial}{\partial y_2} (h_1 F_1) \right] . \end{aligned}$$

Ecrivons maintenant l'ensemble des opérateurs précédents en coordonnées sphériques. Ce système est défini par la métrique :

$$(46) \quad dS^2 = r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + dr^2 ;$$

ici : $y_1 = \theta$ (colatitude);

$y_2 = \varphi$ (longitude);

$y_3 = r$;

on a donc :

$$(47) \quad h_1 = r; \quad h_2 = r \sin \theta; \quad h_3 = 1;$$

et les opérateurs :

$$(48) \quad \begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{T} = \vec{i}_1 \left\{ \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (T_{11} \sin \theta) - \frac{T_{22}}{t_g \theta} \right] + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{21}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 T_{31}) + \frac{T_{13}}{r} \right\} \\ + \vec{i}_2 \left\{ \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (T_{12} \sin \theta) + \frac{T_{21}}{t_g \theta} \right] + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{22}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 T_{32}) + \frac{T_{23}}{r} \right\} \\ + \vec{i}_3 \left\{ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (T_{13} \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{23}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 T_{33}) - \frac{(T_{11} + T_{22})}{r} \right\}; \end{aligned}$$

$$(49) \quad \begin{aligned} \frac{\nabla F_1}{\nabla y_2} &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_1}{\partial \varphi} - \frac{F_2}{r t_g \theta}; & \frac{\nabla F_2}{\nabla y_1} &= \frac{1}{r} \frac{\partial F_2}{\partial \theta}; \\ \frac{\nabla F_3}{\nabla y_2} &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_3}{\partial \varphi} - \frac{F_2}{r}; & \frac{\nabla F_2}{\nabla y_3} &= \frac{\partial F_2}{\partial r}; \\ \frac{\nabla F_3}{\nabla y_1} &= \frac{1}{r} \frac{\partial F_3}{\partial \theta} - \frac{F_1}{r}; & \frac{\nabla F_1}{\nabla y_3} &= \frac{\partial F_1}{\partial r}; \end{aligned}$$

$$(50) \quad \begin{aligned} \frac{\nabla F_1}{\nabla y_1} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial F_1}{\partial \theta} + F_3 \right); \\ \frac{\nabla F_2}{\nabla y_2} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial F_2}{\partial \varphi} + F_1 \cos \theta + F_3 \sin \theta \right); \\ \frac{\nabla F_3}{\nabla y_3} &= \frac{\partial F_3}{\partial r}; \end{aligned}$$

en désignant respectivement par $\frac{\nabla F_1}{\nabla y_1}$ et $\frac{\nabla F_1}{\nabla y_2}$ les premiers membres de (35) et (38). Puis:

$$(51) \quad \vec{\operatorname{grad}} \Phi = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \vec{i}_1 + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \vec{i}_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial r} \vec{i}_3;$$

$$(52) \quad \operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (F_1 \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_2}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 F_3);$$

$$(53) \quad \Delta \Phi = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right);$$

$$(54) \quad \begin{aligned} \vec{\operatorname{rot}} \mathbf{F} = \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial F_3}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r F_2) \right] \vec{i}_1 + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r F_1)}{\partial r} - \frac{\partial F_3}{\partial \theta} \right] \vec{i}_2 \\ + \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial (F_2 \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial F_1}{\partial \varphi} \right] \vec{i}_3. \end{aligned}$$

Enfin, nous utiliserons les notations suivantes : grad^* , div^* , Δ^* l'étoile indiquant qu'il faut prendre l'opérateur dans l'espace à deux dimensions (θ, φ) .

CHAPITRE II

CHOIX D'UN TENSEUR DE TURBULENCE.

CONDITIONS AUX FRONTIÈRES.

ÉNERGIE D'UN MOUVEMENT TURBULENT

1. — Choix d'un tenseur de turbulence.

Le tenseur de turbulence T_{ik} est un tenseur d'ordre deux symétrique, on a donc $T_{ik} = T_{ki}$; on le voit sur l'expression (9) du chapitre précédent et on peut le montrer également en écrivant l'équation des moments, puisqu'on admet que le fluide n'est pas doué de « Spin » ou densité de moment angulaire propre.

La théorie des mouvements turbulents ne peut actuellement fournir une expression rigoureuse du tenseur T_{ik} ; de plus, cette expression est certainement compliquée et inutilisable pour les calculs sans hypothèses simplificatrices.

En océanographie, on utilise une expression linéaire, donc assez simple du tenseur T_{ik} qui découle d'une hypothèse au fond basée sur une analogie formelle avec la viscosité.

Considérons d'abord un domaine dans lequel la turbulence est isotrope; la façon la plus simple de représenter les frottements internes dus à cette turbulence est d'introduire un coefficient ε qui joue le rôle d'un coefficient de viscosité; c'est la « viscosité virtuelle » de J. Boussinesq* et d'Ekman [17]. Nous donnons à ε le nom de coefficient de turbulence. Le tenseur T_{ik} a pour expression :

$$(1) \quad T_{ik} = \varepsilon \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right); \quad i, k = 1, 2, 3.$$

Mais, en général, la turbulence n'est pas isotrope. Dans le cas des courants marins, la verticale joue un rôle spécial : en effet, la profondeur des océans est toujours faible devant leurs dimensions latérales et la stabilité est nettement plus grande suivant la verticale en raison des gradients de densités. On est donc conduit à décrire le frottement turbulent à l'aide de deux coefficients : l'un vertical k , l'autre latéral l . De plus, l'énergie cinétique de turbulence T , qui a pour expression, d'après la relation (9) du chapitre précédent :

$$(2) \quad T = -\frac{1}{2} \sum_i T_{ii};$$

serait nulle dans les cas isotrope, c'est-à-dire avec l'expression (1) de T_{ik} .

En cherchant, sous forme tensorielle, l'expression la plus simple d'un tenseur généralisant (1), on trouve :

$$(3) \quad t_{ik} = \varepsilon^j_i \nabla_j u_k + \varepsilon^j_k \nabla_j u_i + \frac{2S}{3} \varepsilon^j_i g_{jk};$$

* Mémoires présentés par divers savants, vol. 23, Paris 1877.

où ε'_{ij} désigne un tenseur d'ordre deux symétrique, dont les six composantes représentent les coefficients de turbulence dans le cas général. Dans le cas des océans, on prend pour composantes ε'_{ij} les valeurs :

$$(4) \quad \varepsilon'_{ij} = 0 \quad \text{si } i \neq j; \quad \varepsilon'_{11} = \varepsilon'_{22} = 1; \quad \varepsilon'_{33} = k.$$

On suppose les coefficients 1 et k constants et on néglige les termes en S; c'est ce que nous ferons.

Dans ces conditions, on a pour expression du tenseur de turbulence en coordonnées sphériques :

$$(5) \quad \begin{aligned} T_{11} &= \frac{2l}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + w \right); \\ T_{22} &= \frac{2l}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \cos \theta + w \sin \theta \right); \\ T_{33} &= 2k \frac{\partial w}{\partial r}; \\ T_{23} = T_{32} &= \frac{l}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial w}{\partial \varphi} - v \right) + k \frac{\partial v}{\partial r}; \\ T_{31} = T_{13} &= \frac{l}{r} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - u \right) + k \frac{\partial u}{\partial r}; \\ T_{12} = T_{21} &= \frac{l}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{v}{\tan \theta} \right); \end{aligned}$$

et en coordonnées rectangulaires x, y, z :

$$(6) \quad \begin{aligned} T_{11} &= 2l \frac{\partial u}{\partial x}; \quad T_{22} = 2l \frac{\partial u}{\partial y}; \quad T_{33} = 2k \frac{\partial w}{\partial z}; \\ T_{23} = T_{32} &= l \frac{\partial w}{\partial y} + k \frac{\partial v}{\partial z}; \\ T_{13} = T_{31} &= l \frac{\partial w}{\partial x} + k \frac{\partial u}{\partial z}; \quad T_{12} = T_{21} = l \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

2. — Conditions aux frontières.

Les conditions cinématiques habituelles pour un fluide parfait sont conservées. Sur les frontières fixes, on doit avoir si $\vec{n}$ désigne la normale à la surface frontière Σ :

$$(7) \quad \vec{u} \cdot \vec{n} \Big|_{\Sigma} = 0;$$

Puis, sur la surface de séparation de deux fluides, la pression doit être continue :

$$(8) \quad p \Big|_{\Sigma} \text{ continue.}$$

Pour un fluide en régime turbulent, il faut ajouter d'autres conditions. La force superficielle $\vec{f} = \vec{n} \cdot \vec{T}$ doit être continue sur la frontière :

$$(9) \quad \vec{n} \cdot \vec{T} \Big|_{\Sigma} \text{ continue};$$

on a, en effet ($d\tau$, $d\sigma$ désignant les éléments de volume et de surface) :

$$(10) \quad \int_V \operatorname{div} T \, d\tau = \int_{\Sigma} \vec{n} \cdot \vec{T} \, d\sigma;$$

on peut ensuite imaginer trois sortes de conditions :

1° Il n'y a pas de vitesse de glissement sur la frontière Σ :

$$(11) \quad \vec{u} \Big|_{\Sigma} = 0;$$

il y a donc frottement sur Σ .

2° Le vecteur force superficielle $\vec{f} = \vec{n} \cdot \vec{T}$ est sur la frontière Σ normale à celle-ci :

$$(12) \quad \left| \vec{f} - \vec{n} (\vec{f} \cdot \vec{n}) \right|_{\Sigma} = 0;$$

le fluide est parfait sur la frontière Σ , il n'y a pas de frottement sur Σ .

3° Il y a frottement sur la frontière Σ , défini par une relation entre la force superficielle $\vec{f}$ et la vitesse $\vec{u}$:

$$(13) \quad \left| \vec{f} - \vec{n} (\vec{f} \cdot \vec{n}) \right|_{\Sigma} = \vec{u} \, t(|u|).$$

Cela revient à supposer l'existence d'une certaine couche limite. En général, on suppose dans celle-ci la force de frottement constante et la longueur de mélange proportionnelle à la distance à la frontière; on obtient alors une force de frottement proportionnelle au carré de la vitesse. Cette condition, n'étant pas linéaire, entraîne des calculs compliqués, aussi admet-on parfois, arbitrairement, une force de frottement proportionnelle à la vitesse. Σ représente la surface de séparation de la couche limite et du domaine considéré.

3. — Energie d'un mouvement turbulent.

Pour obtenir l'équation de l'énergie du mouvement moyen, multiplions scalairement la relation (10) du chapitre précédent par $\vec{u}$ et supposons la densité ρ constante et égale à un :

$$(14) \quad \frac{d\vec{u}}{dt} \cdot \vec{u} + (2 \vec{\Omega} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{u} = \vec{F} \cdot \vec{u} - \operatorname{grad} p \cdot \vec{u} + \operatorname{div} T \cdot \vec{u};$$

$$(15) \quad \operatorname{div} u = 0;$$

le second terme du premier membre de (14) est nul; d'autre part, le champ de force est, ici, la pesanteur qui dérive d'un potentiel indépendant du temps :

$$(16) \quad \vec{F} = - \operatorname{grad} P;$$

(14) peut donc s'écrire :

$$(17) \quad \frac{d}{dt} \left(P + \frac{1}{2} u^2 \right) = - \operatorname{grad} p \cdot \vec{u} + \operatorname{div} T \cdot \vec{u};$$

or, on a :

$$(18) \quad \operatorname{grad} p \cdot \vec{u} = \operatorname{div} (p u) - p \operatorname{div} u;$$

et l'identité :

$$(19) \quad \sum_{i, k} u_i \frac{\partial T_{ki}}{\partial x_k} = \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sum_i T_{ki} u_i \right) - \sum_{i, k} T_{ki} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} ;$$

s'écrit sous forme vectorielle :

$$(20) \quad \vec{\text{div}} \, T \cdot \vec{u} = \text{div} (\vec{u} \cdot \vec{T}) - \vec{T} \cdot \vec{\text{grad}} \, u ;$$

le premier terme du second membre de (20) représente le travail des tensions superficielles sur l'unité de volume, c'est un terme d'échange qui représente un transfert d'énergie sans dissipation. Le second terme représente l'énergie dissipée dans l'unité de volume, c'est le terme de dissipation*.

La relation (17) s'écrit alors :

$$(21) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} u^2 + P \right) = \text{div} (\vec{u} \cdot \vec{T} - p \vec{u}) - \vec{T} \cdot \vec{\text{grad}} \, u ;$$

ou

$$(22) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} u^2 + P \right) = \text{div} \left[\vec{u} \cdot \vec{T} - \left(p + \frac{1}{2} u^2 + P \right) \vec{u} \right] - \vec{T} \cdot \vec{\text{grad}} \, u ;$$

puisque $\text{div} \, u = 0$; multiplions (22) par l'élément de volume $d\tau$ et intégrons sur le volume total du fluide :

$$(23) \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{u^2}{2} d\tau = \int_V \text{div} [\dots\dots] d\tau - \int_V \vec{T} \cdot \vec{\text{grad}} \, u d\tau ;$$

soit :

$$(24) \quad \frac{\partial E}{\partial t} = \int_V \text{div} [\dots\dots\dots] d\tau - \mathcal{E} ;$$

où E désigne l'énergie cinétique du fluide, $\mathcal{E}$ l'énergie dissipée par turbulence qui se retrouve finalement en chaleur.

On peut transformer l'intégrale de volume du second membre de (24) en intégrale de surface étendue à la surface Σ limitant le volume V :

$$(25) \quad \int_V \text{div} \left[\vec{u} \cdot \vec{T} - \left(p + \frac{1}{2} u^2 + P \right) \vec{u} \right] d\tau \\ = \int_\Sigma \left[\vec{u} \cdot \vec{T} - \left(p + \frac{1}{2} u^2 + P \right) \vec{u} \right] \vec{n} d\sigma ;$$

$\vec{n}$ désigne la normale extérieure à la surface Σ .

Pour les courants de dérive, on distinguera deux cas; dans le premier, le courant de dérive intéresse le volume liquide entier, la surface Σ comprend S_0 et S_1 ; dans le second, le courant de dérive intéresse la partie supérieure du volume fluide, il existe une thermocline représentée par la surface S_2 , et Σ se compose de S_0, S_1, S_2 (voir fig. 1).

Dans les deux cas, on a :

$$(26) \quad \int_\Sigma \left(p + \frac{1}{2} u^2 + P \right) \vec{u} \cdot \vec{n} d\sigma = 0 ;$$

* La densité d'énergie dissipée $e = \vec{T} \cdot \vec{\text{grad}} \, u$ a pour expression tensorielle $e = t^{ki} \nabla_k u_i$.

à cause des conditions aux frontières (mouvement permanent) :

$$\vec{u} \cdot \vec{n} \Big|_{S_1} = \vec{u} \cdot \vec{n} \Big|_{S_2} = \vec{u} \cdot \vec{n} \Big|_{S_0} = 0 ;$$

et, de plus, en négligeant l'action des frontières latérales (vitesses nulles sur celles-ci),

$$(27) \quad \int_{S_1} (\vec{u} \cdot \vec{T}) \cdot \vec{n} \, d\sigma = \int_{S_1} (\vec{n} \cdot \vec{T}) \cdot \vec{u} \, d\sigma = \int_{S_1} t u^2 \, d\sigma = \mathcal{F} ;$$

$$(28) \quad \int_{S_2} (\vec{u} \cdot \vec{T}) \cdot \vec{n} \, d\sigma = \mathcal{F} ;$$

pour le premier et le second cas respectivement. $\mathcal{F}$ désigne l'énergie perdue par frottement sur le fond ou transmise à travers la surface S_2 .

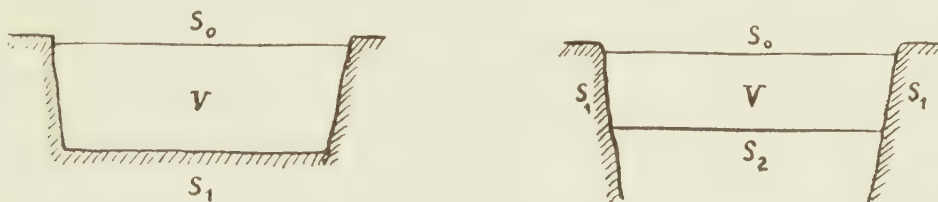


FIG. 1.

La relation (24) s'écrit finalement :

$$(29) \quad \frac{\partial E}{\partial t} + \mathcal{E} = \int_{S_0} (\vec{u} \cdot \vec{T}) \cdot \vec{n} \, d\sigma + \mathcal{F} ;$$

et pour un mouvement permanent :

$$(30) \quad \mathcal{E} = \int_{S_0} (\vec{u} \cdot \vec{T}) \cdot \vec{n} \, d\sigma + \mathcal{F}.$$

Le premier terme du second membre représente l'apport d'énergie par seconde, provenant des actions extérieures sur la surface libre S_0 (ici les vents).

CHAPITRE III

ÉTUDE DE QUELQUES CAS SIMPLES

1. — Généralités.

L'étude des schémas idéalisés est intéressante pour plusieurs raisons : d'abord, les calculs et les résultats sont simples et donc plus facilement lisibles; les aspects globaux et essentiels du problème, ainsi que les limites de la théorie, sont alors mieux en évidence; enfin, on ne risque pas de perdre de vue les hypothèses ni la manière dont elles figurent dans les résultats.

Nous allons donc considérer des domaines simples (rectangulaires et circulaires) et, dans ceux-ci, des solutions à variables séparées.

En général, les variables ne sont séparables que pour certaines équations jointes à

certaines conditions aux frontières; on ne peut donc obtenir de telles solutions pour n'importe quelles conditions aux frontières. Le choix de celles-ci doit être évidemment cohérent du point de vue mécanique; l'ensemble des forces et moments appliqués au système liquide doit être équivalent à zéro. Les forces appliquées sont, ici : à la surface libre, la force d'entraînement du vent, puis les pressions et les tensions (frottements) sur les parois latérales et sur le fond.

Nous supposons le mouvement permanent et utilisons l'approximation qui consiste à négliger les termes non linéaires et à considérer la pression comme égale à la pression hydrostatique. Le terme le plus important dépendant de la composante verticale w de la vitesse est alors celui de l'équation de continuité; on est donc conduit à opérer de la façon suivante : on tire w de l'équation de continuité et on détermine la dénivellation ζ en écrivant que la composante w est nulle sur le fond; en effet, l'équation de continuité étant du premier ordre, on peut remplacer l'équation manquante pour ζ par une condition aux frontières pour w .

Nous supposons d'abord qu'il n'y a pas de force de Coriolis; on a alors pour équations du mouvement, dans un système de coordonnées rectangulaires $o\ x\ y\ z$:

$$(1) \quad l \Delta u + k \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - g \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0;$$

$$l \Delta v + k \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - g \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0;$$

$$(2) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0;$$

u, v, w désignent les composantes de la vitesse, ζ la dénivellation de la surface libre, l et k les coefficients de turbulence et Δ le laplacien $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

La profondeur étant constante et égale à h , on a les conditions suivantes :

$$(3) \quad w \Big|_{z=0,h} = 0;$$

$$(4) \quad k \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} = \tau_x; \quad k \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=0} = \tau_y;$$

puis, dans le cas où il y a frottement sur le fond :

$$(5) \quad u \Big|_{z=h} = v \Big|_{z=h} = 0;$$

dans le cas où il n'y a pas de frottement sur le fond :

$$(6) \quad k \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=h} = k \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=h} = 0;$$

de même, si sur les frontières latérales il y a frottement :

$$(7) \quad u \Big|_c = v \Big|_c = 0.$$

Si le frottement est nul et si $\vec{n}$ désigne la normale à la frontière c :

$$(8) \quad \vec{u} \cdot \vec{n} \Big|_c = 0; \quad \left| \vec{n} \cdot \vec{T} - \vec{n} (\vec{n} \cdot \vec{n} \cdot \vec{T}) \right|_c = 0.$$

L'équation de continuité (2) permet de remplacer les inconnues u , v , w par χ et ψ en posant :

$$(9) \quad u = \frac{\partial \chi}{\partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z}; \quad v = -\frac{\partial \chi}{\partial x} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z}; \quad w = \Delta \psi;$$

et les relations (1) et (9) donnent le système :

$$(10) \quad \begin{aligned} l \Delta \Delta \chi + k \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Delta \chi &= 0; \\ l \Delta \Delta \frac{\partial \psi}{\partial z} + k \frac{\partial^3}{\partial z^3} \Delta \psi + g \Delta \zeta &= 0. \end{aligned}$$

Si on désigne par $\vec{\tau}$ (τ_x , τ_y) la force d'entraînement du vent, on a en général :

$$(11) \quad \tau_x = \frac{\partial \kappa}{\partial y} - \frac{\partial \sigma}{\partial x}; \quad \tau_y = -\frac{\partial \kappa}{\partial x} - \frac{\partial \sigma}{\partial y}.$$

Les conditions (4) et l'hypothèse de la séparabilité de la variable z conduisent à envisager deux classes particulières de solutions.

Les solutions de la *classe A*, ou « rotationnelles », définies par :

$$(12) \quad \operatorname{div} \tau = 0; \quad \Delta \sigma = 0;$$

et donc :

$$(13) \quad w = \Delta \psi = 0; \quad \Delta \zeta = 0.$$

Les solutions de la *classe B* ou « divergences » définies par :

$$(14) \quad \operatorname{rot} \Big|_z \tau = 0; \quad \Delta \kappa = 0;$$

et donc :

$$(15) \quad \Delta \chi = 0.$$

Les solutions les plus générales peuvent être évidemment considérées comme la somme d'une solution « rotationnelle » et d'une solution « divergence ». Ces préliminaires vont nous permettre d'examiner rapidement quelques solutions à variables séparées pour un océan rectangulaire, puis pour un océan circulaire de profondeur constante h .

2. — Océan rectangulaire ($0 \leq x \leq a$; $0 \leq y \leq b$).

I. — SOLUTIONS DE LA CLASSE A.

Les conditions aux frontières entraînent :

$$(16) \quad \left| l \Delta u - g \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right|_{x=0,a} = \left| l \Delta v - g \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right|_{y=0,b} = 0.$$

1^{er} CAS. — Il y a frottement sur le fond et il n'y a pas de frottement sur les parois latérales. — Le système liquide est en équilibre sous l'action d'un couple exercé par le vent

et d'un couple exercé par le frottement sur le fond. Supposons la force d'entraînement du vent définie par* :

$$(17) \quad x = x_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}; \quad \sigma = 0.$$

Les conditions (5) et (8) peuvent s'écrire :

$$(18) \quad \begin{aligned} \chi \Big|_{x=0,a} &= \chi \Big|_{y=0,b} = 0; \\ l \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \Big|_{x=0,a} &= l \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} \Big|_{y=0,b} = 0; \end{aligned}$$

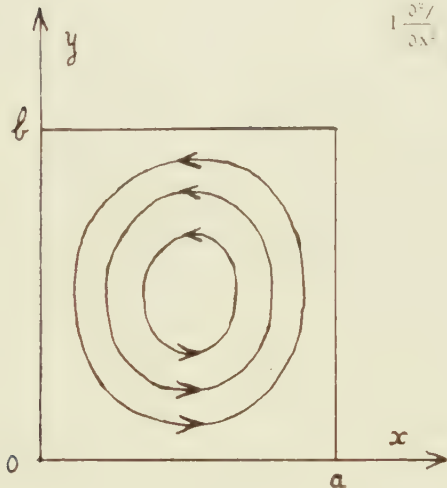


FIG. 2.

et on obtient la solution :

$$(19) \quad \chi = x \frac{\text{Sh } \alpha (h-z)}{k \alpha (\text{Ch } \alpha h)}; \quad \alpha = \pi \sqrt{\frac{1}{k} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)}.$$

Puis la seconde équation (13) et les conditions (16) donnent

$$\zeta = \text{constante.}$$

Si $\alpha h \rightarrow 0$, c'est-à-dire si la profondeur est faible ou si la turbulence latérale est négligeable ($l \rightarrow 0$), il vient :

$$(20) \quad \chi \rightarrow x \frac{h}{k} \alpha;$$

on pourrait, d'autre part, calculer la densité d'énergie dissipée (énergie dissipée par unité de volume) à l'aide de l'expression :

$$(21) \quad \begin{aligned} e = l \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial w}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial w}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] \\ + k \left[2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial v}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right]. \end{aligned}$$

Prenons un exemple numérique :

$$\text{vent} \sim 6 \text{ m/sec.}; \quad x_0 \sim \frac{a}{\pi}; \quad a, b = 1\,000 \text{ km};$$

$$l = 5.10^7 \text{ C. G. S.}; \quad k = 5.10^2 \text{ C. G. S.}; \quad h = 100 \text{ à } 1\,000 \text{ m};$$

on a alors $\alpha h \sim 0,1$ à 1 et on obtient une vitesse maxima de l'ordre de 20 cm/seconde à 1 m/seconde, un transport de masse total de 3.10^6 m³/seconde à 2.10^8 m³/seconde.

La figure 2 donne l'aspect des lignes de courant.

2° CAS. — *Il n'y a frottement ni sur le fond, ni sur les parois latérales.* — La vitesse de l'eau est celle du vent.

* Le cas plus général où x est donné par :

$$x = \sum_{n,m} x_{nm} \sin \frac{n \pi x}{a} \sin \frac{m \pi y}{b};$$

se traite de même.

II. — SOLUTIONS DE LA CLASSE B.

1^{er} CAS. — *Il y a frottement sur le fond et il n'y a pas de frottement sur les parois latérales.* — Le système liquide est en équilibre sous l'action du vent, des forces de frottement sur le fond et des forces de pression (dénivellations).

Supposons la force d'entraînement du vent définie par* :

$$(22) \quad \sigma = \sigma_0 \cos \frac{\pi x}{a}; \quad x = 0.$$

Les conditions (3), (5) et (8) donnent ici :

$$(23) \quad \left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_{x=0,a} = \left. \frac{\partial \psi}{\partial y} \right|_{y=0,b} = 0;$$

$$\left. \psi \right|_{z=0,h} = \left. \frac{\partial \psi}{\partial z} \right|_{z=h} = 0;$$

et on obtient la solution :

$$(24) \quad \psi = \sigma \cdot \varphi(z); \quad \zeta = \sigma \cdot \gamma;$$

et

$$(25) \quad \varphi(z) = \frac{1}{k \alpha^2} \left[1 - \frac{\text{Ch } \alpha(h-z)}{\text{Ch } \alpha h} \right] + \frac{g \gamma}{k \alpha^2} \left[z - \frac{\text{Sh } \alpha z}{\alpha \text{Ch } \alpha h} \right];$$

$$\gamma = -\frac{1}{gh} \cdot \frac{\left(1 - \frac{1}{\text{Ch } \alpha h} \right)}{\left(1 - \frac{\text{th } \alpha h}{\alpha h} \right)}; \quad \alpha = \frac{\pi}{a} \sqrt{\frac{1}{k}}.$$

Si $\alpha h \rightarrow 0$ (turbulence latérale ou profondeur faible), on a :

$$(26) \quad \varphi(z) \rightarrow \frac{h^2}{4k} \cdot \frac{z}{h} \left(1 - \frac{z}{h} \right)^2; \quad \gamma \rightarrow -\frac{3}{2gh};$$

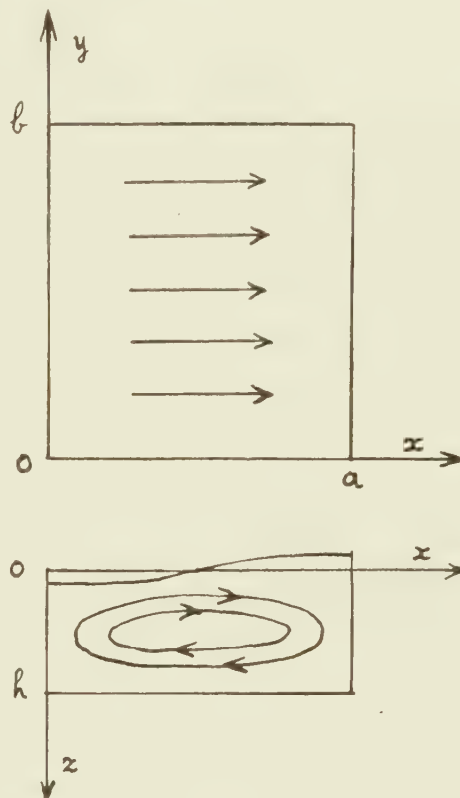


FIG. 3.

des données numériques du même ordre que les précédentes donnent : vitesse horizontale maxima ~ 5 cm/seconde à 1 m/seconde. Vitesse verticale ~ 50 cm/jour à 100 m/jour.

La figure 3 montre l'aspect de la circulation induite.

2^e CAS. — *Il n'y a pas de frottement sur le fond, ni sur les parois latérales.* — Le système liquide est en équilibre sous l'action de la force d'entraînement du vent et des forces de pression (dénivellations). Les conditions (6) remplacent ici les conditions (5).

* Le cas général où σ est défini par :

$$\sigma = \sum_{n,m} \sigma_{nm} \cos \frac{n \pi x}{a} \cos \frac{m \pi y}{b};$$

se traite de la même manière.

Si l'on admet la force d'entraînement du vent, définie par (22), les conditions (23) (surface et fond) deviennent :

$$(27) \quad \psi \Big|_{z=0,h} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \Big|_{z=h} = 0 ;$$

on a encore :

$$(28) \quad \psi = \sigma \cdot \varphi(z) ; \quad \zeta = \sigma \cdot \gamma ;$$

avec :

$$(29) \quad \varphi(z) = \frac{1}{k \alpha^3} \left[1 - \frac{\text{Sh } \alpha (h-z)}{\text{Sh } \alpha h} \right] + g \gamma \frac{z}{k \alpha^2} ;$$

$$\gamma = -\frac{1}{gh} .$$

Si $\alpha h \rightarrow 0$ il vient :

$$(30) \quad \varphi(z) \rightarrow \frac{h^2}{6k} \cdot \frac{h}{z} \left(1 - \frac{z}{h} \right) \left(2 - \frac{z}{h} \right) ;$$

toujours avec les mêmes données numériques, on a des résultats du même ordre que dans le cas précédent.

3. — Océan circulaire de rayon a .

Nous utilisons un système de coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) dans lequel les équations (1) et (2) s'écrivent :

$$(31) \quad 1 \left(\Delta u - \frac{u}{\rho^2} - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + k \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - g \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} = 0 ;$$

$$1 \left(\Delta v - \frac{v}{\rho^2} + \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + k \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - g \frac{1}{\rho} \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} = 0 ;$$

$$(32) \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho u) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 ;$$

L'opérateur Δ a ici le sens :

$$(33) \quad \Delta () = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial ()}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 ()}{\partial \theta^2} .$$

On peut poser comme en coordonnées rectangulaires :

$$(34) \quad u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho \partial z} ; \quad v = -\frac{\partial \chi}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial z} ; \quad w = \Delta \psi ;$$

puis :

$$(35) \quad \tau_\rho = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \kappa}{\partial \theta} - \frac{\partial \sigma}{\partial \rho} ; \quad \tau_\theta = -\frac{\partial \kappa}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} ;$$

et distinguer deux classes particulières de solutions : les solutions de la classe A, ou « rotationnelles », définies par $\text{div } \tau = 0$, et les solutions de la classe B, ou « divergences », définies par $\text{rot } \tau = 0$; bien entendu, les opérateurs div et rot sont à prendre en coor-

données cylindriques. Les équations (10) sont toujours valables avec, pour l'opérateur Δ , la forme (33).

Nous allons considérer quelques solutions à centre de symétrie, c'est-à-dire des solutions correspondant à des mouvements indépendants de l'angle θ .

I. — SOLUTIONS DE LA CLASSE A

1^{re} CAS. — *Il y a frottement sur le fond et sur la frontière latérale.* — Le système liquide est en équilibre sous l'action des couples exercés par le vent et les frottements sur le fond et sur les frontières latérales.

Si la force d'entraînement du vent est définie par* :

$$(36) \quad x = x_0 J_0 \left(\pi_0 \frac{\rho}{a} \right); \quad \pi_0 \neq 3.83; \quad \sigma = 0;$$

J_n désigne la fonction de Bessel de première espèce d'ordre n et π_0 est ici la première racine de J_1 , c'est-à-dire que l'on a $J_1(\pi_0) = 0$. Il vient, compte tenu des conditions frontières (3) (4) (5) et (7) et des propriétés des fonctions de Bessel :

$$(37) \quad \chi = x \cdot \frac{\text{Sh } \alpha (h - z)}{k \alpha \text{Ch } \alpha h}; \quad \zeta = \text{cst.}; \quad \alpha = \frac{\pi_0}{a} \sqrt{\frac{1}{k}}.$$

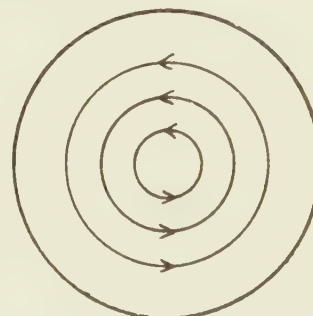


FIG. 4.

Si $\alpha h \rightarrow 0$ (turbulence latérale ou profondeur faible), on a :

$$(38) \quad \chi \rightarrow x \frac{(h - z)}{k}.$$

Si on prend comme données numériques :

vent ~ 6 m/seconde;

$$x_0 \sim \frac{a}{\pi_0};$$

$a = 1\,000$ km;

$h = 100$ m à $1\,000$ m;

$l = 5.10^7$ C. G. S.;

$k = 5.10^2$ C. G. S.;

il vient alors $\alpha h \sim 0,1$ à 1 ; et des résultats du même ordre que ceux obtenus dans le cas d'un océan rectangulaire. Les lignes de courant sont indiquées sur la figure 4.

2^e CAS. — *Il y a frottement sur la frontière latérale et il n'y a pas de frottement sur le fond.* — Le système liquide est en équilibre sous l'action des couples exercés par le vent et le frottement sur la frontière latérale.

La force d'entraînement étant encore définie par (36) et les conditions (6) remplaçant les conditions (5), on obtient :

$$(39) \quad \chi = x \frac{\text{Ch } \alpha (h - z)}{k \alpha \text{Sh } \alpha h}; \quad \alpha = \frac{\pi_0}{a} \sqrt{\frac{1}{k}};$$

$$\zeta = \text{constante}$$

et si $\alpha h \rightarrow 0$;

$$(40) \quad \chi \rightarrow \frac{x}{k \alpha^2 h} = \infty.$$

* On traite de la même manière le cas où x est donné par :

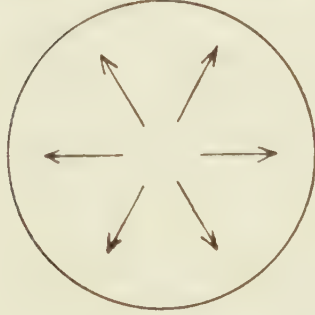
$$x = \sum_n x_n J_0 \left(\pi_n \frac{\rho}{a} \right); \quad J_1(\pi_n) = 0,$$

La vitesse de l'eau tend vers celle du vent; avec les données numériques précédentes, on obtient donc des chiffres physiquement inacceptables pour $\alpha h \approx 1$, mais non pour $\alpha h \sim 1$.

3° CAS. — *Il n'y a pas de frottement sur le fond ni sur la frontière latérale.* — La vitesse de l'eau est celle du vent.

II. — SOLUTIONS DE LA CLASSE B

1° CAS. — *Il y a frottement sur le fond et il n'y a pas de frottement sur la frontière latérale.* — Le système liquide est en équilibre sous l'action de la force d'entraînement du vent, des forces de frottement sur le fond et des forces de pression (dénivellations). Si $\vec{\tau}$ est donné par* :



$$(41) \quad \sigma = \sigma_0 J_0 \left(\pi_0 \frac{\rho}{a} \right); \quad \alpha = 0;$$

il vient :

$$(42) \quad \psi = \sigma \cdot \varphi(z); \quad \zeta = \sigma \cdot \gamma;$$

ou $\varphi(z)$ et γ sont donnés par (25).

La figure 5 montre l'aspect de la circulation induite.

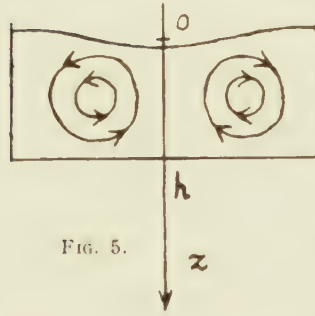


FIG. 5.

2° CAS. — *Il n'y a pas de frottement sur le fond ni sur les frontières latérales.* — Le système est en équilibre sous l'action du vent et des forces de pression (dénivellations).

Si le vent est encore défini par (41), la solution est donnée par (42) et (29).

La densité d'énergie dissipée e a pour expression en coordonnées cylindriques ρ, θ, z :

$$(43) \quad e = \left| 2 \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} \right)^2 + 2 \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{\rho} \right)^2 + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{\rho} + \frac{\partial v}{\partial \rho} \right)^2 \right. \\ \left. + \frac{\partial w}{\partial \rho} \left(\frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right| + k \left| 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial v}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right|.$$

4. — Influence de la force de Coriolis.

Si ν désigne la colatitude et ω la vitesse angulaire de rotation de la terre, les équations (1) deviennent :

$$(44) \quad \begin{aligned} 1 \Delta u + k \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - g \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \lambda v &= 0; \\ 1 \Delta v + k \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - g \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \lambda u - \mu w &= 0; \\ \lambda &= 2 \omega \cos \nu; \quad \mu = 2 \omega \sin \nu. \end{aligned}$$

* On traite de la même manière le cas où σ est donné par :

$$\sigma = \sum_n \sigma_n J_0 \left(\pi_n \frac{\rho}{a} \right); \quad J_1(\pi_n) = 0.$$

En dehors des régions équatoriales, on peut négliger le terme μw . Si l'on suppose λ constant, on a au lieu des relations (10) :

$$(45) \quad \begin{aligned} 1 \Delta \Delta \chi + k \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Delta \chi - \lambda \frac{\partial}{\partial z} \Delta \psi &= 0 ; \\ 1 \Delta \Delta \frac{\partial \psi}{\partial z} + k \frac{\partial^3}{\partial z^3} \Delta \psi + g \Delta \zeta + \lambda \Delta \chi &= 0 ; \end{aligned}$$

on voit alors qu'il n'existe plus de solutions particulières de classe A et B, si du moins on suppose les variables séparables.

Nous allons voir comment agit la force de Coriolis dans le cas d'un bassin circulaire (coordonnées ρ, θ). Nous supposons le mouvement indépendant de θ et la force d'entraînement du vent définie par* :

$$(46) \quad \begin{aligned} \tau_\rho &= \tau_0 \cos \varphi J_1 \left(\pi_0 \frac{\rho}{a} \right) ; & \tau_\theta &= \tau_0 \sin \varphi J_1 \left(\pi_0 \frac{\rho}{a} \right) ; \\ J_1(\pi_0) &= 0 ; & \pi_0 &\neq 3.83 ; \end{aligned}$$

les équations du mouvement se réduisent alors à :

$$(47) \quad \begin{aligned} 1 \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) - \frac{u}{\rho^2} \right] + k \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - g \frac{d\zeta}{d\rho} + \lambda v &= 0 ; \\ 1 \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial v}{\partial \rho} \right) - \frac{v}{\rho^2} \right] + k \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \lambda u &= 0 ; \end{aligned}$$

$$(48) \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho u) + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 ;$$

on obtient aisément une solution complète en posant :

$$(49) \quad \begin{aligned} u &= u_0 J_1 \left(\pi_0 \frac{\rho}{a} \right) ; \\ v &= v_0 J_1 \left(\pi_0 \frac{\rho}{a} \right) ; \\ \frac{d\zeta}{d\rho} &= \gamma J_1 \left(\pi_0 \frac{\rho}{a} \right) ; \\ w &= w_0 J_0 \left(\pi_0 \frac{\rho}{a} \right) . \end{aligned}$$

Les équations (47) se combinent alors sous la forme complexe :

$$(50) \quad \frac{d^2 Z}{dz^2} - (\alpha^2 + 2i q^2) Z = g \frac{\gamma}{k} ;$$

avec :

$$(51) \quad Z = u_0 + i v_0 ; \quad \alpha = \frac{\pi_0}{a} \sqrt{\frac{1}{k}} ; \quad q = \sqrt{\frac{\lambda}{2k}} ;$$

q est lié à la « profondeur de frottement » d'Ekman D par $q = \frac{\pi}{D}$, puis en désignant par $\mathcal{R} \{ \dots \}$ la partie réelle de l'expression comprise entre les accolades :

$$(52) \quad \frac{\pi_0}{a} \mathcal{R} \{ Z \} + \frac{dw_0}{dz} = 0.$$

* Plus généralement, on peut supposer la force d'entraînement du vent définie par :

$$\tau_\rho = \sum_n \tau_n \cos \varphi_n J_1 \left(\pi_n \frac{\rho}{a} \right) ; \quad \tau_\theta = \sum_n \tau_n \sin \varphi_n J_1 \left(\pi_n \frac{\rho}{a} \right) ; \quad J_1(\pi_n) = 0 ;$$

les calculs sont les mêmes.

On obtient pour solution en posant :

$$(53) \quad \beta = q \left(v + \frac{i}{v} \right); \quad v = \sqrt{r^2 + \sqrt{1 + r^4}}; \quad r = \frac{z}{q \sqrt{2}}.$$

1^{er} CAS. — *Il y a frottement sur le fond et sur la paroi latérale.*

$$(54) \quad \begin{aligned} Z &= \frac{\tau_0 e^{i\varphi}}{k \beta} \frac{\text{Sh } \beta (h - z)}{\text{Ch } \beta h} - \frac{g \gamma}{k \beta^2} \left[1 - \frac{\text{Ch } \beta z}{\text{Ch } \beta h} \right]; \\ w_0 &= \frac{\pi_0}{a} \mathcal{R} \left\{ \frac{\tau_0 e^{i\varphi}}{k \beta^2} \left[\frac{\text{Ch } \beta (h - z)}{\text{Ch } \beta h} - 1 \right] + \frac{g \gamma}{k \beta^2} \left[z - \frac{\text{Sh } \beta z}{\beta \text{Ch } \beta h} \right] \right\}; \\ \gamma &= \frac{\tau_0}{g h} \mathcal{R} \left\{ \frac{e^{i\varphi}}{\beta^2} \left(1 - \frac{1}{\text{Ch } \beta h} \right) \right\} / \mathcal{R} \left\{ \frac{1}{\beta^2} \left(1 - \frac{\text{th } \beta h}{\beta h} \right) \right\}. \end{aligned}$$

2^e CAS. — *Il n'y a pas frottement sur le fond et il y a frottement sur la paroi latérale.*

$$(55) \quad \begin{aligned} Z &= \frac{\tau_0 e^{i\varphi}}{k \beta} \frac{\text{Ch } \beta (h - z)}{\text{Sh } \beta h} - \frac{g \gamma}{k \beta^2}; \\ w_0 &= \frac{\pi_0}{a} \mathcal{R} \left\{ \frac{\tau_0 e^{i\varphi}}{k \beta^2} \left[\frac{\text{Sh } \beta (h - z)}{\text{Sh } \beta h} - 1 \right] + \frac{g \gamma}{k \beta^2} z \right\}; \\ \gamma &= \frac{\tau_0}{g h} \mathcal{R} \left\{ \frac{e^{i\varphi}}{\beta^2} \right\} / \mathcal{R} \left\{ \frac{1}{\beta^2} \right\}. \end{aligned}$$

Dans ces deux cas, le mouvement peut être caractérisé par les paramètres r et $s = |\beta h|$. En effet :

Si $r \gg 1$, $s \rightarrow \alpha h$ la force de Coriolis est négligeable et nous retrouvons une solution connue dépendant du paramètre αh .

Si $r \ll 1$, $s \rightarrow qh \sqrt{2}$, c'est maintenant la turbulence latérale qui est négligeable. Le mouvement dépend alors de la grandeur du paramètre $qh \sqrt{2}$. Si $\sqrt{2} qh \gg 1$ on obtient dans les deux cas des solutions finies. Si $\sqrt{2} qh \ll 1$, on obtient pour le premier cas une solution finie, mais pour le second cas une solution tendant vers l'infini.

Si $r \sim 1$, la turbulence latérale et la force de Coriolis ont une égale importance.

Il est inutile de développer ici la discussion et les calculs. Remarquons seulement que, même dans le cas où φ est nul, il existe une circulation verticale et que le mouvement a ainsi une allure hélicoïdale (voir fig. 6). Nous avons supposé que la force de Coriolis est constante dans le domaine considéré; si celui-ci est étendu, λ ne peut plus être regardé comme une constante; c'est une fonction de x (si les axes ox , oy , oz sont orientés respectivement Sud, Est, Nadir). Il faut donc ajouter aux premiers membres des équations (45) respectivement les termes :

$$(56) \quad \frac{d\lambda}{dx} \left(\frac{\partial \chi}{\partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right); \quad \frac{d\lambda}{dx} \left(\frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} \right).$$

Nous n'avons envisagé que les cas limites, frottement nul ou non sur le fond, qui encadrent la réalité (frottement proportionnel au carré de la vitesse).

Il semble bien que l'hypothèse du frottement, nul sur le fond, s'accorde mieux avec les observations, du moins pour des solutions de la classe B [16]; cette hypothèse

convient également si l'on prend comme fond la thermocline et si cette dernière est suffisamment accusée.

Enfin, il faut se rappeler que les océans constituent une mince pellicule à la surface de la terre; le rapport profondeur sur largeur est, en effet, de l'ordre du millième. Dans ces conditions, le nombre de Reynolds du mouvement est défini par $\mathcal{R} = \frac{u h}{\nu}$ où u est la vitesse moyenne et h la profondeur. Il est ici important : $\mathcal{R} \sim 10^7$ à 10^8 G. G. S. Aux grands nombres de Reynolds, une variation de $\mathcal{R}$ entraîne un changement relativement faible des caractéristiques du mouvement. On peut donc considérer que les divers courants océaniques sont déterminés par une valeur de $\mathcal{R}$ fixe et qu'ils dépendent finalement des dimensions et de la géométrie des océans.

Les observations sur les distributions de salinité et de température permettent d'obtenir des valeurs pour les coefficients de diffusion latérale [12, 13, 15]. Ceux-ci sont sensiblement égaux aux coefficients de turbulence. On peut aussi, dans certains cas, obtenir une valeur approchée du coefficient de turbulence [14]. Finalement, les valeurs probables des coefficients l et k sont les suivantes :

$$l \sim 10^7 \text{ à } 10^8 \text{ C. G. S.};$$

$$k \sim 10^2 \text{ à } 10^3 \text{ C. G. S.};$$

$$\frac{l}{k} \sim 10^5;$$

ces valeurs montrent que pour les océans, on a en général $r \sim 1$ du moins en dehors des régions équatoriales où $r > 1$.

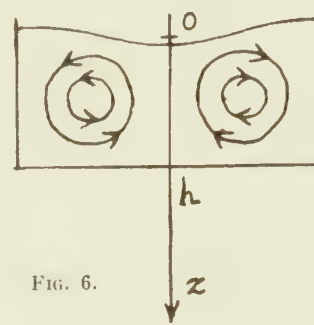
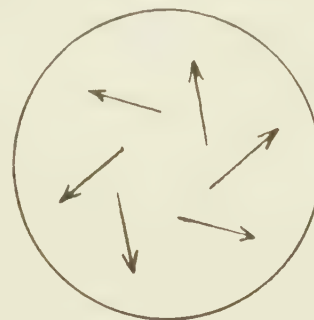


FIG. 6.

CHAPITRE IV

ÉTUDE DE LA CIRCULATION INDUITE PAR LE VENT DANS UN OCÉAN LIMITÉ PAR DEUX MÉRIDIDIENS ET DEUX PARALLÈLES (OCÉANS ATLANTIQUE ET PACIFIQUE)

1. — Equations du transport de masse.

Nous supposons que le mouvement est permanent ($\frac{\partial u}{\partial t} = 0$), que la densité ρ est constante et égale à l'unité; nous négligeons l'accélération verticale et la composante verticale w de la vitesse devant les composantes horizontales u et v . Les équations du mouvement s'écrivent donc :

$$(1) \quad 2 \vec{\Omega} \wedge \vec{u} + \text{rot } u \wedge \vec{u} + \frac{1}{2} \text{grad } u^2 + \text{grad } (P + p) = \text{div } T;$$

$$(2) \quad \text{div } u = 0.$$

Dans les calculs nous ne tiendrons pas compte des termes non linéaires $\text{rot } \mathbf{u} \wedge \mathbf{u}$ et $\text{grad } u^2$, si ce n'est pour estimer leur ordre de grandeur. Enfin, nous supposons que la pression est sensiblement égale à la pression hydrostatique.

Si ζ désigne la dénivellation de la surface libre comptée positivement vers le zénith, g l'accélération de la pesanteur et p_0 la pression atmosphérique, on a :

$$(3) \quad g \text{grad } (P + p) = g \text{grad } (g \zeta + p_0).$$

On sait que dans la méthode du transport de masse on réduit à deux le nombre des dimensions en considérant le mouvement qui résulte d'une moyenne sur la verticale. Le transport de masse est alors défini comme le produit de la vitesse moyenne sur la verticale par la profondeur considérée.

Partons d'un système de coordonnées sphériques (θ, φ, r) et effectuons le changement de variable :

$$(4) \quad r = a + z ;$$

où a désigne le rayon moyen de la terre; on peut négliger les termes de l'ordre de $\frac{z}{a}$, puisque la profondeur utile h est faible devant a . Posons :

$$(5) \quad \vec{U} = \int_{-h}^0 \vec{u} \, dz ; \quad \vec{U} (U, V, o) ;$$

$$\vec{S} = \int_{-h}^0 \text{div } \mathbf{T} \, dz ;$$

$$(6) \quad c \left[\text{rot } \mathbf{U} \wedge \vec{U} + \frac{1}{2} g \text{grad } U^2 \right] = \int_{-h}^0 \left(\text{rot } \mathbf{u} \wedge \vec{u} + \frac{1}{2} g \text{grad } u^2 \right) dz ;$$

et intégrons les relations (1) et (2) par rapport à z ; il vient :

$$(7) \quad 2 \vec{\Omega} \wedge \vec{U} + c \left[\text{rot } \mathbf{U} \wedge \vec{U} + \frac{1}{2} g \text{grad } U^2 \right] + g h g \text{grad } \left(\zeta + \frac{p_0}{g} \right) = \vec{S} ;$$

$$(8) \quad \text{div } * \mathbf{U} = 0.$$

Dans l'intégration qui porte sur $\text{div } \mathbf{T}$, interviennent les conditions aux frontières $z = 0$ et $z = -h$; si $\vec{\tau} = (\tau_\theta, \tau_\varphi, o)$ $\vec{\tau}' = (\tau'_\theta, \tau'_\varphi, o)$ désignent respectivement les tensions à la surface et au fond, ces conditions s'écrivent :

$$(9) \quad \begin{aligned} T_{31} \Big|_{z=0} &= \tau_\theta ; & T_{32} \Big|_{z=0} &= \tau_\varphi ; \\ T_{31} \Big|_{z=-h} &= \tau'_\theta ; & T_{32} \Big|_{z=-h} &= \tau'_\varphi ; \end{aligned}$$

$\vec{\tau}$ représente la force d'entraînement du vent; comme profondeur h , nous prenons celle de la thermocline et nous supposons $\tau'_\theta = \tau'_\varphi = 0$. Le calcul donne alors pour expression de $\vec{S}$:

$$(10) \quad \begin{aligned} \vec{S} = & \vec{i}_1 \left\{ \frac{1}{a^2} \left[\Delta^* U - \frac{U}{\sin^2 \theta} + 2U - \frac{2}{\text{tg } \theta \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right] + \tau_\theta \right\} \\ & + \vec{i}_2 \left\{ \frac{1}{a^2} \left[\Delta^* V - \frac{V}{\sin^2 \theta} + 2V + \frac{2}{\text{tg } \theta \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right] + \tau_\varphi \right\} + \vec{i}_3 \{ \dots \dots \dots \} ; \end{aligned}$$

il est inutile, pour la suite, d'expliciter la troisième composante. La relation (10) s'écrit également grâce à (8) :

$$(11) \quad \vec{S} = \vec{i}_1 \left\{ \frac{1}{a^2} \left[\frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial U}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial \theta} (V \sin \theta) \right) + 2 U \right] + \tau_\theta \right\} \\ + \vec{i}_2 \left\{ \frac{1}{a^2} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (V \sin \theta) - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right) + 2 V \right] + \tau_\varphi \right\} + \vec{i}_3 \left\{ \dots \dots \dots \right\};$$

puis en désignant par ω la vitesse angulaire de rotation de la terre :

$$(12) \quad 2 \vec{\Omega} \wedge \vec{U} = \vec{i}_1 [-2 \omega \cos \theta V] + \vec{i}_2 [2 \omega \cos \theta U] + \vec{i}_3 [-2 \omega \sin \theta V];$$

enfin, on a :

$$(13) \quad c \vec{\text{rot}} U \wedge \vec{U} = \vec{i}_1 \left\{ -\frac{c}{a} \frac{V}{\sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (V \sin \theta) - \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right] \right\} + \vec{i}_2 \left\{ \frac{c}{a} \frac{U}{\sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (V \sin \theta) - \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right] \right\};$$

la relation (8) montre qu'il existe pour $\vec{U}$ une fonction de courant $\frac{1}{a} \chi$ définie par :

$$(14) \quad U = \frac{1}{a \sin \theta} \frac{\partial \chi}{\partial \varphi}; \quad V = -\frac{1}{a} \frac{\partial \chi}{\partial \theta};$$

les équations du transport de masse s'obtiennent en appliquant à la relation (7) :
1° l'opérateur :

$$(15) \quad \text{rot} \Big|_z () = \frac{1}{\sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta ()_\varphi \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi} ()_\theta \right];$$

ce qui donne :

$$(16) \quad \Delta^* \Delta^* \chi + 2 \Delta^* \chi - \frac{2 \omega a^2}{1} \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} + \frac{c}{1 \sin \theta} \left[\frac{\partial \chi}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \Delta^* \chi - \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \theta} \Delta^* \chi \right] = \frac{a^3}{1} \text{rot} \Big|_z \tau;$$

2° l'opérateur div^* et il vient :

$$(17) \quad \Delta^* \zeta = -\frac{1}{g} \Delta^* p_0 + \frac{1}{g h} \left\{ a \text{div}^* \tau - 2 \omega \cos \theta \Delta^* \chi \right. \\ \left. + 2 \omega \sin \theta \frac{\partial \chi}{\partial \theta} - \frac{c}{2 a^2} \Delta^* \left[\frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\partial \chi}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial \theta} \right)^2 \right] \right\}.$$

Dans un système de coordonnées rectangulaires ox, oy, oz orienté respectivement Sud, Est, Zénith, les relations (16) et (17) prennent la forme :

$$(18) \quad \Delta \Delta \chi + \frac{2 \omega}{1} \frac{\partial \chi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} (\cos \theta) + \frac{c}{1} \left[\frac{\partial \chi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \Delta \chi - \frac{\partial \chi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \Delta \chi \right] = \frac{1}{1} \text{rot} \Big|_z \tau;$$

$$(19) \quad \Delta \zeta = -\frac{1}{g} \Delta p_0 + \frac{1}{g h} \left\{ \text{div} \tau - 2 \omega \cos \theta \Delta \chi - 2 \omega \frac{\partial \chi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (\cos \theta) - \frac{c}{2} \Delta \left[\left(\frac{\partial \chi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial y} \right)^2 \right] \right\}.$$

Le transport de masse étant défini par :

$$(20) \quad U = \frac{\partial \chi}{\partial y}; \quad V = -\frac{\partial \chi}{\partial x};$$

et l'opérateur Δ étant égal à : $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Cherchons maintenant une valeur approximative de c ; si $\frac{\bar{u}}{h} = \bar{u}_0$ désigne la vitesse moyenne sur la verticale, on peut écrire :

$$(21) \quad \vec{u} = \vec{u}_0 + \delta \vec{u} ;$$

$\vec{u}_0$ est indépendant de z et $\delta \vec{u}$ est une fonction de z , telle que :

$$(22) \quad \int_{-h}^0 \delta \vec{u} \, dz = 0 ;$$

on a les inégalités :

$$(23) \quad \int_{-h}^0 (\delta \vec{u})^2 \, dz \leq \varepsilon h (\bar{u}_0)^2 ; \quad \varepsilon < 1 ;$$

$$\int_{-h}^0 \delta \vec{u} \frac{\partial}{\partial \theta} \delta \vec{u} \, dz \leq \varepsilon h |\bar{u}_0| \cdot \left| \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \theta} \right| ; \dots\dots\dots$$

d'où l'on déduit :

$$(24) \quad c \sim \frac{1 + \varepsilon}{h} .$$

2. — Calcul de la fonction de courant.

Supposons négligeables les termes non linéaires $c [\dots]$ et prenons comme nouvelle variable la latitude $\psi = \frac{\pi}{2} - \theta$; les relations (14) et (16) deviennent alors :

$$(25) \quad U = \frac{1}{a \cos \psi} \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} ; \quad V = \frac{1}{a} \frac{\partial \chi}{\partial \psi} ;$$

$$(26) \quad \Delta^* \Delta^* \chi + 2 \Delta^* \chi - \frac{2 \omega a^2}{1} \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} = \frac{a^3}{1} \operatorname{rot} \Big|_z \tau ;$$

et les opérateurs Δ^* div^* et $\operatorname{rot}|_z$ ont le sens suivant :

$$(27) \quad \Delta^* = \frac{1}{\cos \psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\cos \psi \frac{\partial}{\partial \psi} \right) + \frac{1}{\cos^2 \psi} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} ;$$

$$\operatorname{div}^* () = - \frac{1}{\cos \psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(() \psi \cos \psi \right) + \frac{1}{\cos \psi} \frac{\partial}{\partial \varphi} () \varphi ;$$

$$\operatorname{rot} \Big|_z () = \frac{1}{\cos \psi} \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} () \psi - \frac{\partial}{\partial \psi} \left(() \varphi \cos \psi \right) \right] .$$

Les frontières de l'océan sont définies par les deux parallèles $\psi = \pm \psi_0$ et les deux méridiens $\varphi = 0, \varphi_0$ (la longitude φ est comptée positive vers l'Est). Sur ces frontières, nous admettons que la vitesse est nulle ; il en résulte, pour la fonction χ , les conditions :

$$(28) \quad \chi \Big|_{\psi = \pm \psi_0, \varphi = 0, \varphi_0} = 0 ;$$

qui expriment que la frontière est une ligne de courant. Puis les conditions :

$$(29) \quad \frac{\partial \chi}{\partial \psi} \Big|_{\psi = \pm \psi_0} = \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi = 0, \varphi_0} = 0 ;$$

qui expriment que la vitesse de glissement est nulle sur la frontière.

Posons maintenant :

$$(30) \quad \lambda^3 = \frac{2 \omega a^2}{1}; \quad \frac{R}{\cos^4 \psi} = \frac{a^3}{1} \operatorname{rot} \Big|_z \tau;$$

on obtient facilement une excellente approximation de la solution rigoureuse de (26) dans les circonstances suivantes :

$$(31) \quad \lambda \gg 1; \quad \lambda^3 \chi \ll R.$$

En effet, considérons une fonction χ' telle que :

$$(32) \quad \frac{\partial \chi'}{\partial \psi} \sim \chi'; \quad \frac{\partial \chi'}{\partial \varphi} \sim \lambda \chi';$$

remplaçons χ par χ' dans l'équation (26), il vient :

$$(33) \quad \frac{\partial^4 \chi'}{\partial \varphi^4} - \lambda^3 \cos^4 \psi \frac{\partial \chi'}{\partial \varphi} + \varepsilon(\chi') = R;$$

où $\varepsilon(\chi')$ désigne un ensemble de termes dont le plus important est de l'ordre de $\lambda^2 \chi'$. Si les conditions (31) sont réalisées, le terme $\varepsilon(\chi')$ est négligeable; donc, dans le domaine des conditions (31), on peut remplacer l'équation (26) par l'équation perturbée suivante :

$$(34) \quad \frac{\partial^4 \chi}{\partial \varphi^4} - \lambda^3 \cos^4 \psi \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} = R.$$

La solution de l'équation perturbée (34) sera d'autant plus voisine de la solution de (26) que les conditions (31) seront plus fortes.

L'équation (34) s'intègre aisément à l'aide d'un calcul de perturbation; posons :

$$(35) \quad \chi = \chi_0 + \chi_1 + \chi_2 + \dots;$$

les fonctions $\chi_0, \chi_1, \dots$ satisfaisant aux relations :

$$(36) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^4 \chi_0}{\partial \varphi^4} - \lambda^3 \frac{\partial \chi_0}{\partial \varphi} &= R; \\ \frac{\partial^4 \chi_1}{\partial \varphi^4} - \lambda^3 \frac{\partial \chi_1}{\partial \varphi} &= -\lambda^3 \frac{\partial \chi_0}{\partial \varphi} (1 - \cos^4 \psi); \\ \frac{\partial^4 \chi_2}{\partial \varphi^4} - \lambda^3 \frac{\partial \chi_2}{\partial \varphi} &= -\lambda^3 \frac{\partial \chi_1}{\partial \varphi} (1 - \cos^4 \psi); \\ &\dots \end{aligned}$$

Nous supposons, dans (36), les variables séparables :

$$(37) \quad R = L(\varphi) \cdot M(\psi);$$

et, à cause de (28) (29), réalisées les conditions :

$$(38) \quad M \Big|_{\psi = \pm \psi_0} = \frac{dM}{d\psi} \Big|_{\psi = \pm \psi_0} = 0;$$

cela revient à admettre que $M(\psi)$ peut être développé dans un système de fonctions orthogonales $M_m(\psi)$ tel que :

$$(39) \quad \begin{aligned} M_m(\psi) &= \cos \frac{\pi}{2} \frac{\psi}{\psi_0} \cdot \cos \frac{\pi}{2} m \frac{\psi}{\psi_0}; & m \text{ impair} \\ M_m(\psi) &= \cos \frac{\pi}{2} \frac{\psi}{\psi_0} \cdot \sin \frac{\pi}{2} m \frac{\psi}{\psi_0}; & m \text{ pair}; \end{aligned}$$

on peut alors poser :

$$(40) \quad \begin{aligned} \chi_0 &= M(\psi) N_0(\varphi); \\ \chi_1 &= M(\psi) (1 - \cos^4 \psi) N_1(\varphi); \\ \chi_2 &= M(\psi) (1 - \cos^4 \psi)^2 N_2(\varphi); \\ &\dots \end{aligned}$$

Les fonctions $N_0, N_1, \dots$ satisfaisant à :

$$(41) \quad \begin{aligned} \frac{d^4 N_0}{d\varphi^4} - \lambda^3 \frac{dN_0}{d\varphi} &= L(\varphi); \\ \frac{d^4 N_1}{d\varphi^4} - \lambda^3 \frac{dN_1}{d\varphi} &= -\lambda^3 \frac{dN_0}{d\varphi}; \dots \end{aligned}$$

Dans le cas où la distribution des vents est « zonale », c'est-à-dire indépendante de la longitude φ , on a :

$$(42) \quad L(\varphi) = 1;$$

et les solutions du système (41), (42), (28), (29) s'obtiennent sans difficultés; on a finalement, pour $\varphi_0 = 1$, en laissant de côté les termes très petits :

$$(43) \quad \begin{aligned} N_0(\varphi) &= \frac{1}{\lambda^4} \left\{ \lambda(1 - \varphi) - 1 + e^{\frac{\lambda(\varphi-1)}{2}} + e^{-\frac{\lambda\varphi}{2}} (1 - \lambda) \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \lambda \varphi \right. \\ &\quad \left. + e^{-\frac{\lambda\varphi}{2}} \sqrt{3} \left(1 - \frac{\lambda}{3} \right) \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \lambda \varphi \right\}; \\ N_1(\varphi) &= \frac{1}{\lambda^4} \left\{ \lambda(1 - \varphi) - \frac{4}{3} + \left[\frac{4}{3} + \frac{\lambda}{3} (1 - \varphi) \right] e^{\frac{\lambda(\varphi-1)}{2}} \right. \\ &\quad \left. + e^{-\frac{\lambda\varphi}{2}} \left[\frac{4}{3} - \lambda \left(1 + \frac{\varphi}{3} \right) \right] \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \lambda \varphi + e^{-\frac{\lambda\varphi}{2}} \left[\frac{4 - \lambda}{3} + \lambda \left(1 - \frac{2\lambda}{3} \right) \frac{\varphi}{3} \right] \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \lambda \varphi \right\}; \\ &\dots \end{aligned}$$

3. — Application à un océan de dimensions comparables à celles de l'Atlantique.

On a pris comme modèle de l'Atlantique un océan limité par les frontières $\psi_0 = 60^\circ$; $\varphi_0 = 1$ (radian), et une distribution des vents voisine de celle qui existe sur l'Atlantique. La carte de la figure 7 donne la moyenne annuelle des vents, et les courbes en pointillé l'intensité en degrés Beaufort. On a obtenu cette carte en effectuant une moyenne des données mensuelles de l'« Atlas of Climatic Charts of the oceans » [21]. On voit que la circulation est sensiblement zonale, c'est-à-dire indépendante de la longitude. La force d'entraînement du vent est donnée par la relation :

$$(44) \quad \vec{\tau} = \frac{\partial x^2 w^2}{\left| \log \left(\frac{z + z_0}{z_0} \right) \right|^2} \cdot \frac{\vec{w}}{|\vec{w}|};$$

qui exprime l'action du vent sur la surface de l'eau par frottement turbulent. Elle résulte des hypothèses de Prandtl ou de celle de Karman, si l'on suppose que dans la couche limite turbulente la force superficielle τ est constante (égale à sa valeur moyenne) et que la longueur de mélange est proportionnelle à la distance z de la surface [19, 23].

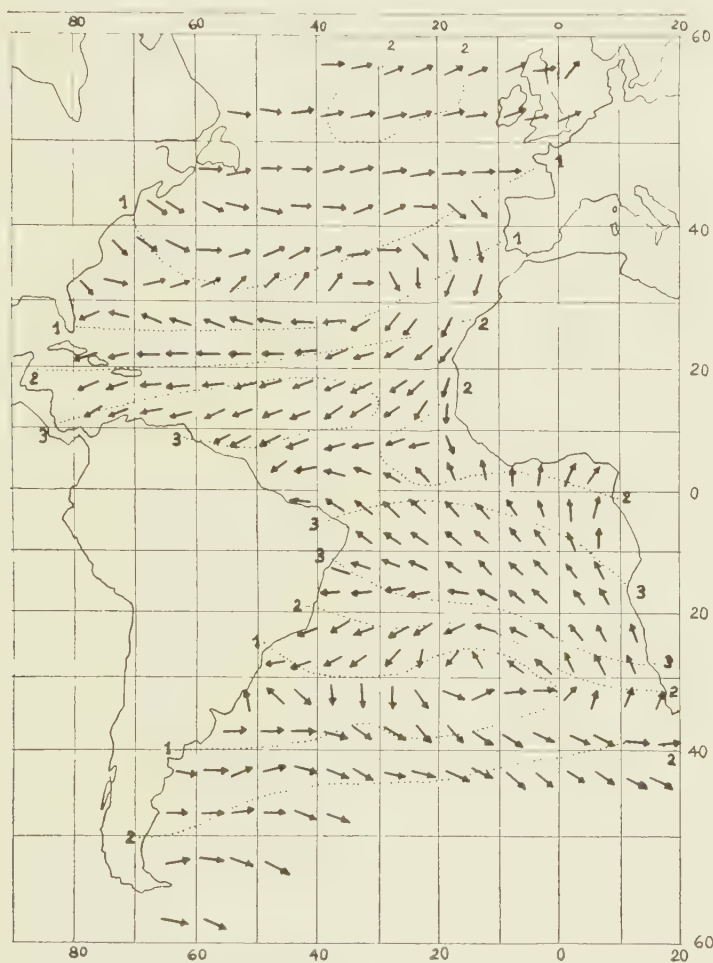


FIG. 7. — Moyenne annuelle des vents sur l'Atlantique.

w désigne la vitesse du vent à la hauteur z au-dessus de la mer, z_0 la longueur de rugosité, x une constante universelle de turbulence et δ la densité de l'air. En admettant les valeurs (C. G. S.) :

$$z_0 = 0.6; \quad x = 0.4; \quad \delta = 1.2 \cdot 10^{-3}; \quad z = 10^3;$$

la relation (44) s'écrit :

$$(45) \quad \vec{\tau} = 3 \cdot 10^{-6} w^2 \cdot \frac{\vec{w}}{|\vec{w}|};$$

la courbe de la figure 8 donne la force d'entraînement correspondant à une distribution de vents zonale voisine de celle de la figure 7. Les autres données numériques sont :

- le rayon de la terre $a = 6,37.10^8$ cm;
- la vitesse de rotation $\omega = 7,27.10^{-5}$;
- la profondeur moyenne de la thermocline $h = 200$ m;

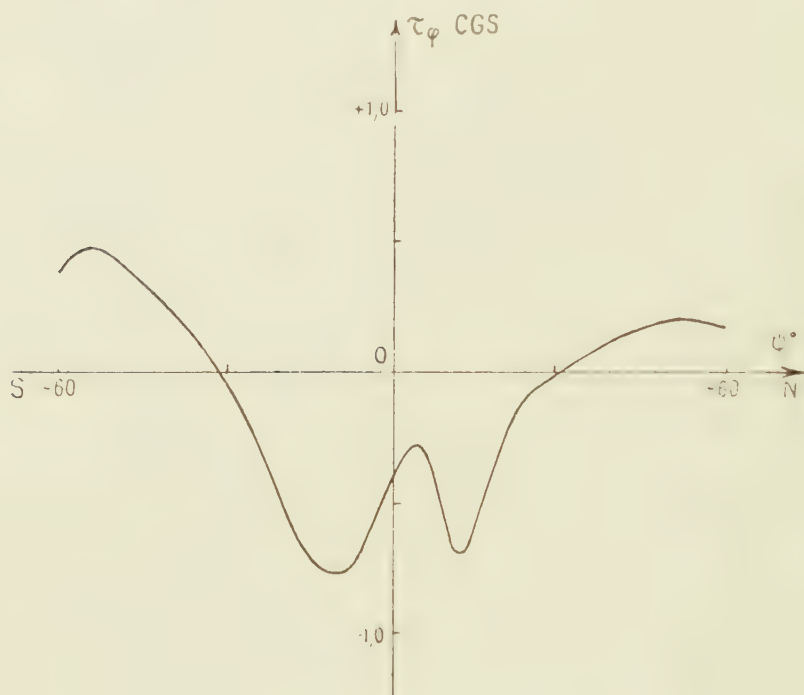


FIG. 8. — Force d'entraînement du vent adoptée.

— le coefficient latéral de turbulence $l = 2.10^7$ C. G. S.; on vérifie alors facilement que les conditions (31) sont satisfaites; on a en effet (unités C. G. S.) :

$$\begin{aligned} \lambda &= 144 \\ f &\sim 10^{11}; & \xi(\chi) &\sim 10^{-1}; \\ R &\sim 10^{19}; & c &\sim 5 \cdot 10^{-1}; \end{aligned}$$

et en désignant par $\eta(\chi)$, les termes non linéaires :

$$\eta(\chi) \sim \frac{c}{l} \chi^3 \gamma^2;$$

le rapport Q du terme $\eta(\chi)$, au terme le plus grand de l'équation (26), donne l'importance relative des termes non linéaires :

$$Q \sim \frac{c}{\lambda l} \chi \sim 10^{-4};$$

les valeurs des fonctions $N_0(\varphi)$, $N_1(\varphi)$, $N_2(\varphi)$ sont données dans le tableau 2 et la figure 9. Les lignes de courant (fig. 10) pour le transport de masse, c'est-à-dire les courbes $\chi = \text{cst}$, ont été calculées avec $\chi = \chi_0 + \chi_1 + \chi_2 + \chi_3$, on voit facilement que le développement de χ est convergent dans la région qui nous intéresse et que les extrema de χ_0 aux latitudes 20° N. et 20° S. sont à majorer d'environ un tiers pour avoir les valeurs correctes de χ .

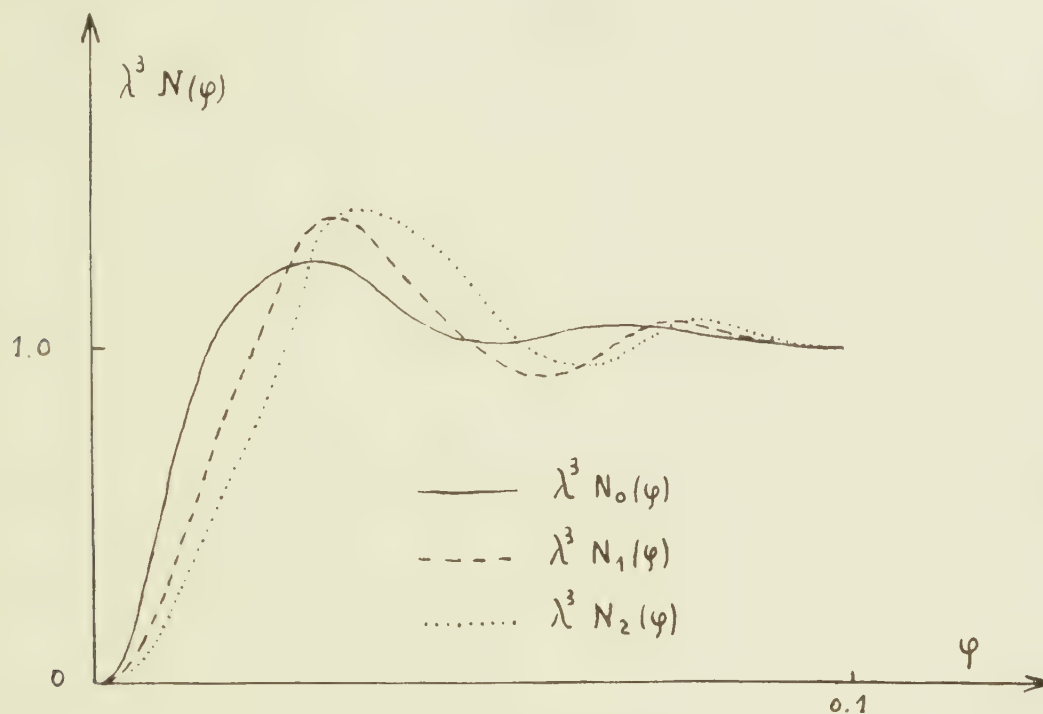


FIG. 9. — Courbes $N(\varphi)$ au voisinage de la côte Ouest.

4. — Energie dissipée par turbulence.

Elle a pour expression, d'après la relation (30) du chapitre II, si l'on suppose $\mathcal{F}$ négligeable :

$$(46) \quad \mathcal{E} = \int_{S_0} (u_0 \tau_\theta + v_0 \tau_\varphi) d\sigma;$$

u_0 et v_0 sont les composantes de la vitesse en surface que nous remplaçons par les valeurs approchées $\frac{U}{h}$, $\frac{V}{h}$; d'où :

$$(47) \quad \begin{aligned} \mathcal{E} &\sim \int_{S_0} \frac{1}{h} (U \tau_\theta + V \tau_\varphi) d\sigma \\ &= -\frac{a}{h} \int_{S_0} \left(\frac{1}{\cos \psi} \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} \tau_\theta + \frac{\partial \chi}{\partial \psi} \tau_\varphi \right) \cos \psi d\psi d\varphi; \end{aligned}$$

d'autre part, on voit facilement que :

$$(48) \quad \int_{S_0} \frac{\partial \chi}{\partial \psi} \tau_\theta d\psi d\varphi = 0;$$

$$\int_{S_0} \frac{\partial \chi}{\partial \psi} \tau_\varphi \cos \psi d\psi d\varphi = - \int_{S_0} \chi \frac{\partial}{\partial \psi} (\tau_\varphi \cos \psi) d\psi d\varphi;$$

et le calcul numérique de la seconde intégrale donne :

$$(49) \quad \mathcal{E} \sim -2,3 \cdot 10^{17} \text{ C. G. S.}$$

On peut également calculer directement la valeur de $\mathcal{E}$ d'après sa définition :

$$(50) \quad \mathcal{E} = \int_V \vec{T} \cdot \vec{g} \text{ grad } u d\tau;$$

avec les mêmes approximations, on obtient :

$$(51) \quad \mathcal{E} \sim -\frac{1}{a^2 h} \int_V \frac{1}{\cos^3 \psi} \left(\frac{\partial^3 \chi}{\partial \varphi^2} \right)^2 d\psi d\varphi;$$

on a ensuite :

$$\int_0^1 \left(\frac{d^2 N_0}{dz^2} \right)^2 dz \sim \frac{1}{2 \lambda^4};$$

d'où :

$$(52) \quad \mathcal{E} \sim -3,6 \cdot 10^{17} \text{ C. G. S.};$$

on peut donc adopter comme ordre de grandeur de l'énergie dissipée par seconde :

$$(53) \quad \mathcal{E} = -3 \cdot 10^{17} \text{ C. G. S.} = -3 \cdot 10^7 \text{ Kw.}$$

5. — Forme modifiée des équations dans l'hypothèse de 1 fonction de θ et φ .

Il faut alors ajouter à l'expression (11) de $\vec{S}$ le vecteur (on néglige toujours $\vec{w}$) :

$$(54) \quad \vec{S}' = \vec{i}_1 \left\{ \frac{2}{a^2} \frac{\partial l}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{1}{a^2 \sin \theta} \frac{\partial l}{\partial \varphi} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} + \frac{\partial V}{\partial \theta} - \frac{V}{\tan \theta} \right] \right\} \\ + \vec{i}_2 \left\{ \frac{1}{a^2} \frac{\partial l}{\partial \theta} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} + \frac{\partial V}{\partial \theta} - \frac{V}{\tan \theta} \right] + \frac{2}{a^2 \sin^3 \theta} \frac{\partial l}{\partial \varphi} \left[\frac{\partial V}{\partial \varphi} + U \cos \theta \right] \right\};$$

soit en coordonnées rectangulaires (1 fonction de x, y) :

$$(55) \quad \vec{S}' = \vec{i}_1 \left\{ 2 \frac{\partial l}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial l}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \right\} \\ + \vec{i}_2 \left\{ \frac{\partial l}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) + 2 \frac{\partial l}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} \right\}.$$

Si, maintenant, on ne garde que les termes les plus importants, il s'ajoute, aux premiers membres des équations (16) et (18), respectivement les termes :

$$+ \frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial l}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \varphi^2} \right); \quad + \frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial l}{\partial y} \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} \right);$$

les équations deviennent ainsi beaucoup moins simples. M. M. MIYAZAKI [31] pense que c'est uniquement la diminution de l au voisinage de la côte qui est la cause du contre-courant à l'Ouest du Gulf Stream; il considère une bande étroite le long de la côte Ouest où l est constant, mais plus faible qu'au large; puis, cherchant les deux solutions qui correspondent à ces deux domaines et se raccordent sur leur frontière commune, il montre qu'en supposant nulle une des huit constantes arbitraires et en écrivant sept conditions aux limites, l'existence du contre-courant est possible. Maintenant il faudrait, pour étayer l'idée de M. MIYAZAKI, déterminer une condition aux limites, qui soit responsable de cette constante nulle; mais là, on se heurte aux difficultés provenant de la discontinuité de l sur la frontière commune.

M. ROSSBY, dans sa théorie du « wake-stream » [20], rend compte de ce contre-courant, mais il tient compte des termes non linéaires; l'importance relative de ceux-ci doit probablement augmenter lorsque l diminue (voir l'expression de $\eta(\chi)$).

Les recherches sur ce point restent donc ouvertes.

6. — Conclusion sur la circulation des eaux atlantiques.

Il est intéressant de comparer la figure 10 avec la carte de transport de masse de SVERDRUP [23] et celle des courants. Qualitativement, la théorie retrouve bien l'aspect général de la circulation atlantique et les phénomènes bien connus : intensification des courants à l'Ouest produite par la variation de l'accélération de Coriolis avec la latitude et contre-courant équatorial qui provient du maximum relatif (minimum en valeur absolue) de τ au voisinage de l'équateur.

Quant aux écarts entre les résultats de cette théorie assez grossière et ceux de l'observation, ils ne doivent pas nous étonner. Il ne faut pas oublier, en effet, l'action importante de la géométrie des frontières (ici le dessin des continents) sur la forme des phénomènes. Nous avons, pour simplifier les calculs, choisi un océan limité par deux méridiens et deux parallèles; en réalité, les frontières de l'Océan Atlantique sont bien différentes, surtout celles de l'Ouest.

Le Brésil présente, à la latitude d'environ 7° Sud, un angle qui s'avance comme un coin dans le courant Sud-équatorial; l'inclinaison très forte de la côte entre 7° Sud et 10° Nord provoque sans doute une diminution considérable du contre-courant équatorial. La configuration de la mer des Antilles laisse une ouverture entre 10° et 15° Nord, qui capte la partie du courant Sud-équatorial déviée par le coin du Brésil, plus une partie du courant Nord-équatorial. Enfin, et surtout, la solution dépend étroitement de la pente de la courbe $\tau(\psi)$ pour laquelle les données sont assez imprécises.

Ceci dit, il n'est pas étonnant de voir le minimum de la fonction χ , qui, sur le modèle théorique, se situe vers 20° Nord, se trouver, dans la réalité, environ 10° plus au Nord. Quantitativement, les vitesses moyennes maxima sont de l'ordre de 1,60 et 1,40 m/seconde, respectivement dans le courant de Floride et dans le Gulf Stream, alors que notre calcul donne 1,0 m/seconde. D'autre part, le transport de masse total est de 55 millions de m^3 /seconde et de 65 millions si l'on tient compte du contre-courant à gauche du Gulf Stream; la théorie ne donne que 20 millions de m^3 /seconde. W. MUNK [26, 27] obtient 36 et 23 millions de m^3 /seconde avec une force d'entraînement respec-

TABLEAU I

ψ°	τ_φ	P_0	$M (\psi)$
—60	+0,39 C. G. S.	0,988 10^6 C. G. S.	—0,2 10^{10} C. G. S.
—55	+0,47	0,991 »	—0,1 »
—50	+0,40	0,996 »	+0,2 »
—45	+0,29	1,004 »	+0,4 »
—40	+0,17	1,015 »	+0,5 »
—35	+0,08	1,020 »	+0,6 »
—30	—0,02	1,021 »	+1,2 »
—25	—0,22	1,021 »	+2,5 »
—20	—0,48	1,020 »	+3,4 »
—15	—0,70	1,018 »	+2,3 »
—10	—0,75	1,016 »	—0,3 »
—5	—0,60	1,013 »	—3,3 »
—3	—0,50	1,013 »	—4,1 »
0	—0,35	1,012 »	—2,9 »
+3	—0,28	1,011 »	0 »
+5	—0,30	1,011 »	+1,8 »
+10	—0,57	1,013 »	+3,9 »
+15	—0,68	1,017 »	—0,4 »
+20	—0,45	1,019 »	—4,5 »
+25	—0,15	1,021 »	—2,2 »
+30	—0,02	1,022 »	—0,7 »
+35	+0,04	1,021 »	—0,3 »
+40	+0,08	1,019 »	—0,2 »
+45	+0,12	1,017 »	—0,2 »
+50	+0,18	1,012 »	—0,1 »
+55	+0,20	1,009 »	+0,1 »
+60	+0,17	1,006 »	+0,1 »

TABLEAU II

φ	$\lambda^3 \cdot N_0 (\varphi)$	$\lambda^3 \cdot N_1 (\varphi)$	$\lambda^3 \cdot N_2 (\varphi)$
0	0	0	0
0,005	+0,19	+0,08	+0,05
0,01	0,57	0,31	0,22
0,015	0,89	0,63	0,46
0,02	1,01	0,80	0,62
0,03	1,11	1,22	1,20
0,04	0,97	1,08	1,21
0,05	0,90	0,90	1,04
0,06	0,92	0,81	0,85
0,07	0,93	0,91	0,86
0,08	0,92	0,93	0,93
0,09	0,90	0,91	0,92
0,1	0,89	0,89	0,89
0,2	0,79	0,80	0,79
0,3	0,69	0,69	0,69
0,4	0,59	0,59	0,59
0,5	0,49	0,49	0,49
0,6	0,39	0,39	0,39
0,7	0,29	0,29	0,29
0,8	0,19	0,19	0,19
0,9	0,09	0,09	0,09
1,0	0	0	0

Remarquons enfin que, si l'on admet pour l'Océan Pacifique une distribution zonale de vents identique à celle de l'Atlantique (elle en diffère assez peu en réalité) et si l'on considère un modèle du Pacifique s'étendant sur 120° de longitude, le transport de masse

total s'obtient en multipliant par trois le flux Atlantique correspondant. On a, dans ces conditions, pour le Kouroshivo 60 millions de $\text{m}^3/\text{seconde}$, les estimations donnent 65 millions de $\text{m}^3/\text{seconde}$. Rappelons que W. MUNK [26] obtient 39 millions de $\text{m}^3/\text{seconde}$ et M. K. HIDAKA [28] 44 et 80 millions de $\text{m}^3/\text{seconde}$, suivant que la distribution des vents est anticyclonique ou zonale.

CHAPITRE V

DÉNIVELLATIONS PRODUITES LE LONG DES CÔTES DE L'AMÉRIQUE DU NORD

1. — Calcul de la dénivellation ξ par la théorie du transport de masse.

L'équation (17) du chapitre précédent se simplifie si on suppose τ_ψ nul et si on ne garde au second membre que le terme le plus important.

Elle devient :

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial \varphi^2} = -2 \omega \operatorname{th} \sigma \frac{\partial^2 \chi}{\partial \varphi^2};$$

avec :

$$(2) \quad \xi = h(p_0 + g\xi); \quad \sigma = \log \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2} \right) \right|;$$

ψ désigne la latitude et χ la fonction de courant déjà obtenue. Quant aux conditions aux frontières, elles sont pour ξ , d'après les équations directes et la forme de χ :

$$(3) \quad \left. \frac{\partial \xi}{\partial \psi} \right|_{\psi = \pm \psi_0} = \left| -\frac{1}{a^2 gh \operatorname{Cos} \psi} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \varphi \partial \psi^2} - \frac{a \tau_\psi}{gh} \right|_{\psi = \pm \psi_0} \neq 0;$$

$$\left. \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} \right|_{\varphi = 0, \varphi_0} = \left| \frac{1}{a^2 gh} \operatorname{Cos} \psi \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{1}{\operatorname{Cos}^2 \psi} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \varphi^2} \right) + \frac{a}{gh} \tau_\varphi \operatorname{Cos} \psi \right|_{\varphi = 0, \varphi_0}$$

$$\neq \frac{a}{gh} \left| \tau_\varphi \operatorname{Cos} \psi \right|_{\varphi = 0, \varphi_0}.$$

Nous laissons le zéro de ξ arbitraire; mais la dénivellation ξ est évidemment nulle s'il n'y a pas de vent ($\tau_\varphi = 0$) et si la pression est normale ($p_0 = p_N$) : alors $\xi = h p_N$. En admettant pour p_0 les relations approximatives :

$$(4) \quad \frac{\partial p_0}{\partial \varphi} = 0; \quad \left. \frac{\partial p_0}{\partial \psi} \right|_{\psi = \pm \psi_0} = 0.$$

Les conditions aux frontières pour la fonction ξ sont :

$$(5) \quad \operatorname{Ch} \sigma \frac{\partial \xi}{\partial \sigma} \Big|_{\sigma = \pm \sigma_0} = 0; \quad \left. \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} \right|_{\varphi = 0, \varphi_0} = \frac{a \tau_\varphi}{\operatorname{Ch} \sigma}.$$

Pour simplifier les calculs, on peut se contenter de l'approximation $\chi_o = M(\sigma) N_o(\varphi)$ pour la fonction χ et admettre que la distribution des vents est symétrique par rapport à l'équateur. Le système (1), (5) se résout alors facilement à l'aide des développements suivants :

$$(6) \quad \begin{aligned} \xi &= \sum_m Q_m(\varphi) P_m(\sigma); & -2\omega \operatorname{th} \sigma M(\sigma) &= \sum_m A_m P_m(\sigma); \\ \frac{\tau \varphi}{\operatorname{Ch} \sigma} &= \sum_m B_m P_m(\sigma); & P_m(\sigma) &= \cos \pi \frac{m \sigma}{\sigma_o}; & P_o &= 1; \end{aligned}$$

où les coefficients A_m , B_m sont donnés par :

$$(7) \quad \begin{aligned} A_m &= \frac{2}{\sigma_o} \int_0^{\sigma_o} [-2\omega \operatorname{th} \sigma M(\sigma)] P_m(\sigma) d\sigma; \\ A_o &= \frac{1}{\sigma_o} \int_0^{\sigma_o} [-2\omega \operatorname{th} \sigma M(\sigma)] d\sigma; \\ B_m &= \frac{2}{\sigma_o} \int_0^{\sigma_o} \frac{\tau \varphi}{\operatorname{Ch} \sigma} P_m(\sigma) d\sigma; & B_o &= \frac{1}{\sigma_o} \int_0^{\sigma_o} \frac{\tau \varphi}{\operatorname{Ch} \sigma} d\sigma. \end{aligned}$$

La relation (1) donne ainsi les équations :

$$(8) \quad \frac{d^2 Q_m}{d\varphi^2} - \frac{m^2 \pi^2}{\sigma_o^2} Q_m = A_m \frac{d^2 N_o}{d\varphi^2};$$

qui s'intègrent sans difficulté. On obtient les solutions suivantes suffisamment approchées pour $m \ll \frac{\lambda \sigma_o}{\pi}$;

$$(9) \quad \begin{aligned} Q_m &= \frac{A_m}{\lambda^4} \left\{ e^{\lambda(\varphi-1)} + (1-\lambda) e^{-\frac{\lambda \varphi}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \lambda \varphi + \left(1 - \frac{\lambda}{3}\right) e^{-\frac{\lambda \varphi}{2}} \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \lambda \varphi \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{a \lambda^4 B_m}{A_m} - \lambda \right) \frac{1}{\frac{m \pi}{\sigma_o} \operatorname{Sh} \frac{m \pi}{\sigma_o}} \left[\operatorname{Ch} \frac{m \pi \varphi}{\sigma_o} - \operatorname{Ch} \frac{m \pi}{\sigma_o} (\varphi-1) \right] \right\}; \end{aligned}$$

$$(10) \quad \begin{aligned} Q_o &= \frac{A_o}{\lambda^4} \left\{ e^{\lambda(\varphi-1)} + (1-\lambda) e^{-\frac{\lambda \varphi}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \lambda \varphi + \left(1 - \frac{\lambda}{3}\right) e^{-\frac{\lambda \varphi}{2}} \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \lambda \varphi \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{a \lambda^4 B_o}{A_o} - \lambda \right) \varphi + C \right\} + h p_N; \end{aligned}$$

où C désigne une constante arbitraire. Avec les données numériques du chapitre précédent, on obtient les valeurs de ξ le long des côtes Atlantique et Pacifique de l'Amérique du Nord.

2. — Résultats des mesures de nivellement.

Ceux-ci proviennent des mesures de nivellement du Coast and Geodetic Survey [33]. L'ajustement du réseau a été effectué par la méthode des moindres carrés; et en plus des corrections habituelles, la correction orthométrique a été appliquée. Celle-ci a une signification théorique importante. On sait, en effet, que sur la terre les surfaces de

niveau ne sont pas parallèles entre elles : ce sont des surfaces équipotentielles de la gravité g . Il en résulte qu'entre deux surfaces équipotentielles S et $S + dS$, l'écart dh varie en fonction de la valeur de g , de façon que :

$$(11) \quad g \, dh = \text{est.}$$

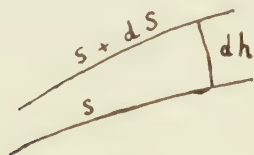


FIG. 11.



FIG. 12.

L'altitude corrigée d'un point A par rapport au point de référence Ω (altitude zéro) est définie par :

$$(12) \quad H = \int_{\Omega}^A dH,$$

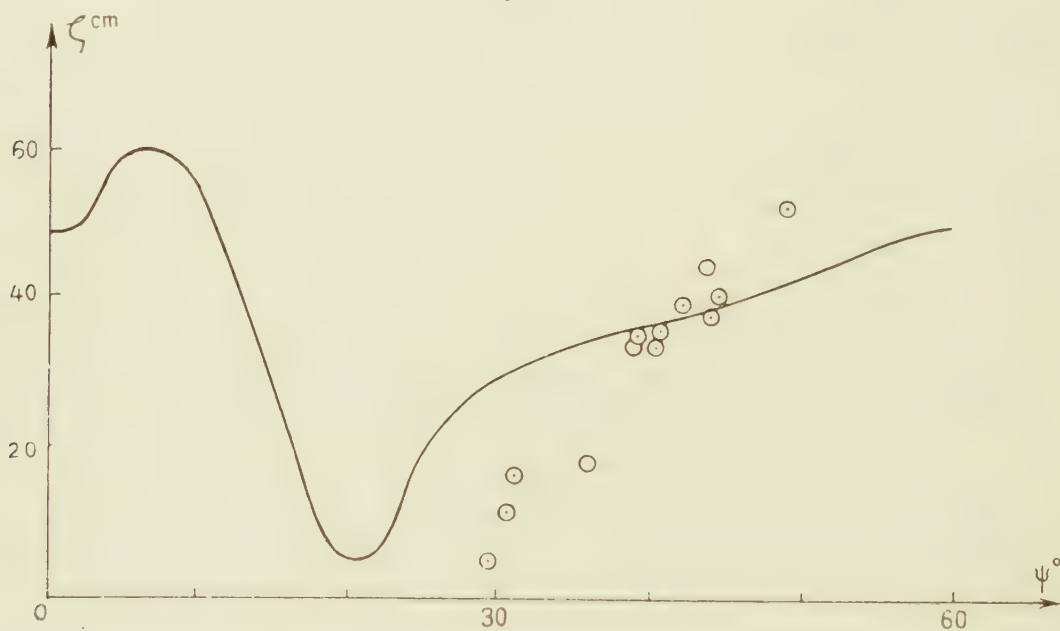


FIG. 13. — Niveau moyen observé et calculé (Atlantique).

où H doit être indépendant du trajet ΩA ; on a donc en général :

$$(13) \quad dH = dh + C;$$

où C désigne la correction de gravité. L'altitude orthométrique est une altitude corrigée définie par :

$$(14) \quad H_{\text{ort.}} = \frac{1}{g_m} \int_a^A g \, dh = \frac{1}{[g_m]} \int_{\Omega}^A g \, dh;$$

où g_m est la gravité moyenne le long de la verticale aA. On en déduit la correction orthométrique.

L'altitude des niveaux moyens, eux-mêmes déduits de longues séries d'observations de la marée, a été déterminée en prenant comme référence le niveau moyen de Galveston. En ce qui concerne la précision de ces résultats, on peut compter sur des erreurs inférieures à 5 cm pour 1 000 km. On voit sur les chiffres que nous reproduisons dans le tableau III qu'il existe une remontée de la surface de niveau moyen, vers le Nord le long

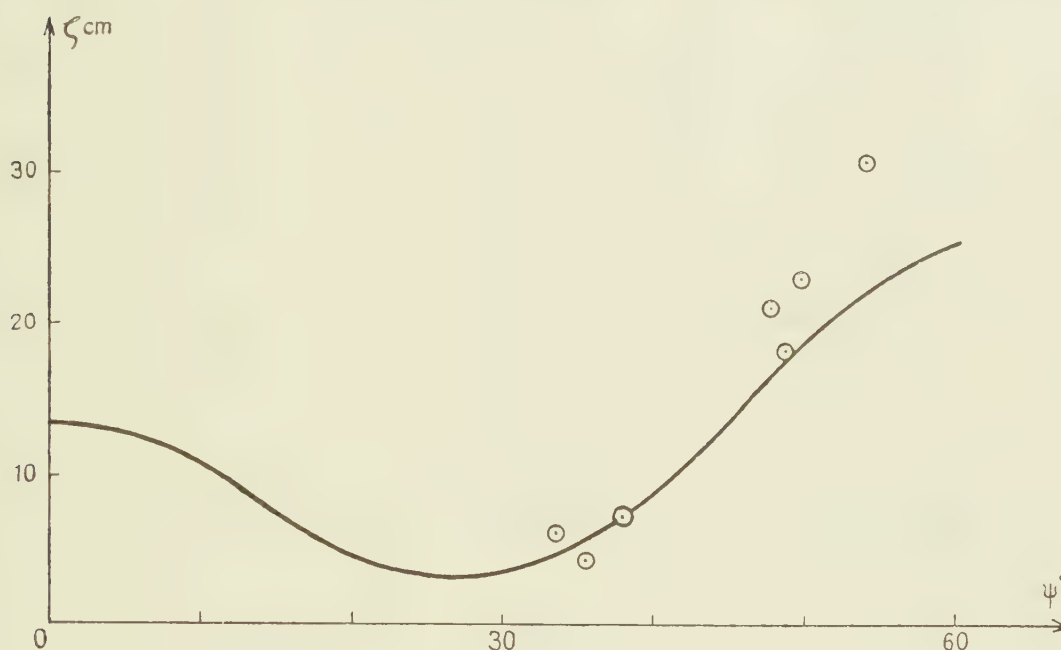


FIG. 14. — Niveau moyen observé et calculé (Pacifique).

des côtes Atlantique et Pacifique, vers l'Ouest le long de la côte du Golfe du Mexique; ces différences de niveau sont respectivement de l'ordre de 40, 30 et 10 cm.

La comparaison de ces résultats avec ceux de la théorie est satisfaisante (voir fig. 13 et 14), surtout si l'on tient compte des trois points suivants :

1° Il y a un décalage systématique de 10° de latitude entre la circulation réelle de l'Océan Atlantique et celle du modèle théorique, et ce décalage se retrouve sur les courbes de niveau moyen.

2° Si l'on tenait compte des approximations suivantes : $\chi_1 \dots$ pour la fonction χ , on obtiendrait ζ avec une meilleure précision.

3° La remontée vers l'Ouest le long de la côte du Golfe du Mexique correspond à celle vers le Sud sur le modèle théorique.

TABLEAU III

Station	Niveau moyen en cm	
	Calculs de 1927	Calculs de 1929
<i>Golfe du Mexique :</i>		
Galveston (Tex.)	0	0
Biloxi (Miss.)	-7	-9
Pensacola (Fla.)	-2	-5
Cedar Key (Fla.)	-13	-8
<i>Côte Atlantique :</i>		
St. Augustine (Fla.)	-24	-27
Fernandina (Fla.)	-19	-20
Brunswick (Ga.)	-16	-16
Norfolk (Va.)	-16	-14
Old Point Comfort		-28
Cape May (N. J.)	-6	+2
Atlantic City (N. J.)	-5	+3
Annapolis (Md.)		-17 *
Baltimore (Md.)		-18 *
Perth Amboy (N. J.)		+1
Fort Hamilton (N. Y.)	-5	+3
Boston (Mass.)	+1	+7
Portland (Me.)	+7	+12
Yarmouth		+5
Halifax		+8
Father Point		+20
<i>Côte Pacifique :</i>		
San Diego (Calif.)	+40	+33
San Pedro (Calif.)	+32	+31
San Francisco (Calif.)	+44	+34
Fort Stevens (Oreg.)	+79 *	+59 *
Anacortes (Wash.)	+64	+45
Seattle (Wash.)	+66	+48
Vancouver		+50
Prince Rupert		+58

(*) Nous laissons de côté les chiffres suivis d'un astérisque; les écarts qu'ils présentent sur l'ensemble proviennent sans doute d'irrégularités locales du dessin de la côte ou des profondeurs.

TABLEAU IV

ψ°	σ	τ_ψ	M (σ)	$\frac{P_a - P_N}{g}$
0	0	-0,30 C. G. S.	0 C. G. S.	-1 cm
6	0,10	-0,50	+4,0 10 ¹⁰	-2 "
12	0,21	-0,68	0	+2 "
20	0,36	-0,50	-4,5 "	+6 "
26	0,47	-0,12	-1,7 "	+8 "
30	0,55	-0,02	-0,7 "	+9 "
40	0,76	+0,08	-0,0 "	+6 "
50	1,01	+0,18	-0,1 "	-1 "
52	1,06	+0,19	0	-3 "
55	1,15	+0,20	+0,1 "	-4 "
60	1,32	+0,17	+0,1 "	-7 "

TABLEAU V

ψ°	Côte Atlantique		Côte Pacifique	
	$\xi - h p_N$	ζ	$\xi - h p_N$	ζ
0	+1,6 10°C. G. S.	+9 cm*	-3,7 10°C. G. S.	-17 cm*
6	+3,7 »	+20	-3,9 »	-17
12	+1,7 »	+6	-3,9 »	-21
20	-5,8 »	-35	-4,0 »	-26
26	-2,1 »	-18	-3,7 »	-26
30	-0,2 »	-10	-3,6 »	-27
40	+0,4 »	-4	-3,0 »	-21
50	+0,1 »	+2	-2,5 »	-11
52	+0,4 »	+5	-2,4 »	-9
55	+0,6 »	+7	-2,2 »	-7
60	+0,5 »	+10	-2,3 »	-4

(*) Zéro arbitraire.

CHAPITRE VI

CIRCULATION INDUITE PAR LE VENT
DANS UN MODÈLE SIMPLE DE L'OcéAN ANTARCTIQUE

1. — Insuffisance de la méthode du transport de masse.

Définissons un modèle idéalisé de l'Antarctique, limité par deux parallèles, 45° S et 70° S, et de profondeur h constante. La thermocline est inexistante dans l'Océan Antarctique. Nous allons utiliser la méthode du transport de masse, en admettant que le frottement est nul sur le fond, et montrer qu'elle ne convient pas ici.

Nous supposons le mouvement indépendant de la longitude φ et négligeons les effets de la pression atmosphérique p_0 . En prenant comme variable $\mu = \cos \theta$ ($\theta =$ colatitude), les équations du transport de masse se réduisent à :

$$(1) \quad \frac{d^2}{d\mu^2} \left[(1 - \mu^2) \frac{d\chi}{d\mu} \right] + 2 \frac{d\chi}{d\mu} = - \frac{a^3}{l} \cdot \frac{\tau_\varphi \zeta}{\sqrt{1 - \mu^2}} ;$$

$$(2) \quad \frac{d\zeta}{d\mu} = - \frac{2 \omega}{g h} \mu \frac{d\chi}{d\mu} ;$$

χ est la fonction de courant, ζ la dénivellation et τ_φ la force d'entraînement du vent. Le transport de masse $\vec{U}$ (U, V, O) est défini par :

$$(3) \quad U = 0 ; \quad V = \frac{1}{a} \sqrt{1 - \mu^2} \frac{d\chi}{d\mu} ;$$

Si τ_φ s'exprime par :

$$(4) \quad \tau_\varphi = -\tau_0 \sqrt{1 - \mu^2} \frac{d}{d\mu} (P_2 + \alpha Q_0);$$

avec $\alpha = +0,3298$, l'intégrale générale de l'équation (1) est :

$$(5) \quad \chi = \frac{\alpha^3 \tau_0}{21} \left[A + B P_1 + C Q_1 - \frac{P_3}{2} + \alpha Q_0 \right];$$

où $P_n(\mu)$, $Q_n(\mu)$ désignent les fonctions de Legendre de première et seconde espèce d'ordre n .

Puis (2) donne pour ζ :

$$(6) \quad \zeta = -\frac{\omega a^3 \tau_0}{1 g h} \left[D + \frac{B}{3} (P_2 + 2 P_0) + \frac{C}{3} (Q_2 + 2 Q_0) - \left(\frac{3 P_1 + 2 P_3}{10} \right) - \frac{\alpha}{2} \log(1 - \mu^2) \right]$$

A, B, C, D sont des constantes à déterminer à l'aide des conditions aux frontières.

Sur la frontière Sud ($\mu_1 = -0,9397$), nous supposons qu'il y a frottement (vitesse nulle) :

$$(7) \quad \left. \frac{d\chi}{d\mu} \right|_{\mu = \mu_1} = 0.$$

La frontière Nord ($\mu_2 = -0,7071$) est, en réalité, une frontière fictive qui sépare l'Antarctique des autres océans.

Nous faisons successivement les trois hypothèses suivantes :

1° Il y a frottement, la vitesse est nulle :

$$(8) \quad \left. \frac{d\chi}{d\mu} \right|_{\mu = \mu_2} = 0;$$

2° Il n'y a pas de frottement :

$$(9) \quad (1 - \mu^2) \left. \frac{d^2 \chi}{d\mu^2} \right|_{\mu = \mu_2} = 0;$$

3° La vitesse a une certaine valeur connue :

$$(10) \quad \sqrt{1 - \mu^2} \left. \frac{d\chi}{d\mu} \right|_{\mu = \mu_2} = a V = a h v.$$

Enfin les zéros de ζ et χ peuvent être fixés par :

$$(11) \quad \left. \zeta \right|_{\mu = \mu_1} = 0;$$

$$(12) \quad \left. \chi \right|_{\mu = \mu_1} = 0.$$

Avec les données numériques suivantes (unités C. G. S.) :

$$\tau_0 = 3 \text{ (vent } \sim 10 \text{ m sec.)}$$

$$a = 6,37 \cdot 10^4; \quad \omega = 7,3 \cdot 10^{-5}$$

$$h = 4 \cdot 10^8; \quad v = 10 \text{ cm/sec.}$$

$$l = 10^{10};$$

on obtient les résultats :

	1 ^{re} hypothèse	2 ^e hypothèse	3 ^e hypothèse
Transport total de masse.....	$4.10^9 \text{ m}^3/\text{sec.}$	$4,6.10^9 \text{ m}^3/\text{sec.}$	$1.10^9 \text{ m}^3/\text{sec.}$
Vitesse moyenne maxima.....	8 cm/sec.	70 cm/sec.	17 cm/sec.
Dénivellation	1,20 m.	13,50 m.	3,10 m.

Ainsi, il faut admettre ou bien que le coefficient l est très important ($\sim 10^{10}$ C. G. S.) ou bien plutôt que le frottement sur le fond est égal à la force d'entraînement du vent au centième près. M. K. HIRAKA [36] est également obligé d'admettre un coefficient l de 10^{10} C. G. S., bien qu'il fasse intervenir les composantes horizontales de la vitesse au lieu du transport de masse; mais il utilise un système de coordonnées rectangulaires qui ne convient pas à cet océan. Nous allons voir que ces difficultés disparaissent si l'on tient compte de la circulation verticale tout en utilisant un système de coordonnées sphériques.

2. — Circulation induite compte tenu de la composante verticale w de la vitesse.

Prenons comme modèle de l'Océan Antarctique un océan annulaire limité par deux parallèles de latitude ψ_1 et ψ_2 , et supposons le mouvement indépendant de la longitude φ . Cette circonstance réduit à deux le nombre des variables; les équations du mouvement ainsi simplifiées s'écrivent avec les hypothèses habituelles :

$$(13) \quad \frac{1}{a^2} \left[D u - \frac{u}{1 - \mu^2} - a \frac{\partial u}{\partial z} \right] + k \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \lambda v + \frac{g}{a} \sqrt{1 - \mu^2} \frac{d\zeta}{d\mu} = 0;$$

$$\frac{1}{a^2} \left[D v - \frac{v}{1 - \mu^2} - a \frac{\partial v}{\partial z} \right] + k \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \lambda u = 0;$$

$$(14) \quad \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \mu} \left(u \sqrt{1 - \mu^2} \right) = \frac{\partial w}{\partial z}; \quad \lambda = 2 \omega \mu.$$

Dans ces relations on a posé :

$$(15) \quad \mu = \sin \psi; \quad D = \frac{\partial}{\partial \mu} (1 - \mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu};$$

rappelons que u, v, w désignent les composantes de la vitesse (orientées Sud, Est, Zénith), ζ la dénivellation de la surface libre, a, ω le rayon et la vitesse de rotation de la terre, l et k les coefficients de turbulence, enfin ψ désigne la latitude et z la profondeur comptée positive vers le zénith.

Dans ce qui suit, nous considérons λ comme constant, ce qui constitue une première approximation suffisante, puisque l'on est assez loin de l'équateur; λ est ici négatif, puisqu'il s'agit de l'hémisphère Sud. Prenons u orienté vers le Nord et groupons les deux équations [13] en une seule complexe, il vient :

$$(16) \quad \frac{1}{a^2} \left[D Z - \frac{Z}{1 - \mu^2} - a \frac{\partial Z}{\partial z} \right] + k \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} - i \lambda Z = \frac{g}{a} \sqrt{1 - \mu^2} \frac{d\zeta}{d\mu}.$$

$$Z = u + i v.$$

Supposons qu'il y ait frottement sur les parois latérales et que la force d'entraînement du vent soit définie par :

$$(17) \quad \tau_\varphi = \tau_0 P_n^1(\mu); \quad \tau_\psi = 0;$$

$P_n^1(\mu)$ désignant la fonction de Legendre associée de première espèce de degré n et d'ordre 1. On choisit des frontières $\mu_1 = -0,92$; $\mu_2 = -0,74$ ($\psi_1 = 67^\circ$ S; $\psi_2 = 48^\circ$ S), et $n = 9$, de sorte que :

$$P_n^1(\mu_1) - P_n^1(\mu_2) = 0.$$

Posons alors ($P_n(\mu)$ désignant la fonction de Legendre de première espèce, de degré n , d'ordre zéro) :

$$(18) \quad \begin{aligned} Z &= Z_0 P_n(\mu); \\ \sqrt{1-\mu^2} \frac{\partial \zeta}{\partial \mu} &= \gamma P_n^1(\mu); \\ W &= W_0 P_n(\mu). \end{aligned}$$

La relation (16) devient :

$$(19) \quad \frac{d^2 Z_0}{dz^2} - 2\delta \frac{dZ_0}{dz} - (x^2 + 2i q^2) Z_0 = \frac{g}{a} \frac{\gamma}{k};$$

avec :

$$(20) \quad \alpha = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{n(n+1)}{k}}; \quad q = \sqrt{\frac{\lambda}{2k}}; \quad \delta = \frac{a x^2}{2n(n+1)}.$$

D'autre part, sachant que :

$$(21) \quad \frac{d}{d\mu} \left[\sqrt{1-\mu^2} P_n^1(\mu) \right] = -n(n+1) P_n(\mu);$$

la relation (14) donne :

$$(22) \quad \frac{dw_0}{dz} = \frac{n(n+1)}{a} \mathcal{R} \left\{ Z_0 \right\};$$

$\mathcal{R} \{ \dots \}$ signifie qu'il faut prendre la partie réelle de l'expression comprise entre les accolades.

A la surface libre, on a pour Z_0 la condition :

$$(23) \quad \left| k \frac{dZ_0}{dz} - \frac{1}{a} Z_0 \right|_{z=0} = \tau_0 e^{\frac{\pi}{2}}$$

et au fond :

1° s'il y a frottement :

$$(24) \quad Z_0 \Big|_{z=-h} = 0;$$

2° s'il n'y a pas de frottement :

$$(25) \quad \left| k \frac{dZ_0}{dz} - \frac{1}{a} Z_0 \right|_{z=-h} = 0;$$

d'autre part, on a évidemment :

$$(26) \quad w_0 \Big|_{z=0} = w_0 \Big|_{z=-h} = 0.$$

Si on pose maintenant :

$$(27) \quad \beta_1 = \delta + q \left(v + \frac{i}{v} \right); \quad \beta_2 = \delta - q \left(v + \frac{i}{v} \right);$$

$$v = \sqrt{r^2 + s^2 + \sqrt{1 + (r^2 + s^2)^2}}; \quad r = \frac{\alpha}{q\sqrt{2}}; \quad s = \frac{\delta}{q\sqrt{2}};$$

on obtient pour solution des équations (19) :

1° Dans le cas où il y a frottement sur le fond :

$$(28) \quad Z_0 = \frac{\tau_0 e^{i\frac{\pi}{2}} e^{-\beta_2 h} [e^{\beta_2 (h+z)} - e^{\beta_1 (h+z)}]}{k [\beta_1 - 2\delta - (\beta_1 - 2\delta) e^{(\beta_1 - \beta_2)h}]} - \frac{g\gamma}{a k (x^2 + 2i q^2)} \left\{ 1 - e^{\beta_1 (h+z)} \right.$$

$$\left. + \frac{[2\delta + (\beta_1 - 2\delta) e^{\beta_1 h}] e^{-\beta_2 h}}{[\beta_2 - 2\delta - (\beta_1 - 2\delta) e^{(\beta_1 - \beta_2)h}]} [e^{\beta_2 (h+z)} - e^{\beta_1 (h+z)}] \right\};$$

2° dans le cas où il n'y a pas de frottement sur le fond :

$$(29) \quad Z_0 = \frac{\tau_0 e^{i\frac{\pi}{2}} e^{-\beta_2 h}}{k [1 - e^{(\beta_1 - \beta_2)h}]} \left[\frac{e^{\beta_2 (h+z)}}{\beta_2 - 2\delta} - \frac{e^{\beta_1 (h+z)}}{\beta_1 - 2\delta} \right] - \frac{g\gamma}{a k (x^2 + 2i q^2)} \left\{ 1 + \frac{2\delta e^{\beta_1 (h+z)}}{\beta_1 - 2\delta} \right.$$

$$\left. + \frac{2\delta (1 - e^{(\beta_1 - \beta_2)h}) e^{-\beta_2 h}}{[1 - e^{(\beta_1 - \beta_2)h}]} \left[\frac{e^{\beta_2 (h+z)}}{\beta_2 - 2\delta} - \frac{e^{\beta_1 (h+z)}}{\beta_1 - 2\delta} \right] \right\};$$

W_0 se calcule aisément dans les deux cas; la première condition (26) fixe la constante d'intégration et la seconde détermine la constante γ .

Le mouvement est caractérisé par des paramètres que l'on met en évidence si l'on passe à des variables non dimensionnelles; ce sont ici r , s et $t = |\beta_1 h|$ ou $|\beta_2 h|$ (le coefficient s et le terme δ proviennent de la courbure de la terre). Enumérons rapidement les différents cas possibles :

1° $r \gg 1$; la force de Coriolis est négligeable, on peut distinguer trois cas :

- a) $r \gg s$; $\beta_1, \beta_2 \rightarrow \alpha$;
- b) $r \sim s$; $\beta_1 \rightarrow \delta + \sqrt{\alpha^2 + \delta^2}$; $\beta_2 \rightarrow \delta - \sqrt{\alpha^2 + \delta^2}$;
- c) $r \ll s$; $\beta_1 \rightarrow 2\delta$; $\beta_2 \rightarrow 0$.

2° $r \ll 1$; $s \ll 1$; $\beta_1, \beta_2 \rightarrow q(1 + i)$, le frottement latéral est négligeable.

3° $r \sim 1$; la force de Coriolis et le frottement latéral ont une importance comparable.

On a comme données numériques (unités C. G. S.) :

$$a = 6,37.10^8; \quad h = 4.10^5;$$

$$\tau_0 \sim 0,7; \quad (\text{vent de } 10 \text{ m/seconde});$$

$$\lambda \sim 7.10^{-5}; \quad n = 9;$$

$$k \sim 5.10^2; \quad l \sim 5.10^7.$$

Dans ces conditions, on a $r \sim 1,2.10^{-2}$ et $s \sim 2,2.10^{-1}$ et on se trouve entre le troisième cas et le second, mais plutôt dans ce dernier. Quant au troisième paramètre, il a pour

valeur : $t \sim 170 \gg 1$; et comme le frottement sur le fond n'est certainement pas négligeable, on peut utiliser l'expression limite de (28) :

$$(30) \quad \begin{aligned} Z_0 &\rightarrow \frac{\tau_0 e^{i \frac{\pi}{2}} e^{\beta z}}{k(\beta - 2\delta)} - \frac{g\gamma}{a k \beta (\beta - 2\delta)} \left[1 - e^{-\beta(h+z)} + \frac{2\delta e^{\beta z}}{\beta - 2\delta} \right]; \\ W_0 &\rightarrow \frac{n(n+1)}{a} \mathcal{R} \left\{ \frac{\tau_0 e^{i \frac{\pi}{2}} (e^{\beta z} - 1)}{k \beta (\beta - 2\delta)} - \frac{g\gamma}{a k \beta (\beta - 2\delta)} \left[z + \frac{1}{\beta} e^{-\beta(h+z)} + \frac{2\delta}{\beta} \frac{(e^{\beta z} - 1)}{(\beta - 2\delta)} \right] \right\}; \\ \gamma &= \frac{a\tau}{gh} \cdot \mathcal{R} \left\{ \frac{i}{\beta(\beta - 2\delta)} \right\} / \mathcal{R} \left\{ \frac{1 - \frac{1}{\beta h} \left(1 - \frac{2\delta}{\beta - 2\delta} \right)}{\beta(\beta - 2\delta)} \right\}; \\ &\quad \beta = q(1+i). \end{aligned}$$

Il est inintéressant d'effectuer des calculs détaillés vu l'imprécision des données (valeur de l et k); nous donnons seulement quelques valeurs approchées :

- vitesse maximum de l'ordre de 10 cm/seconde;
- transport de masse $\sim 10^8$ m³/seconde;
- vitesse verticale maxima ~ 1 m/jour;
- dénivellation ~ 1 m.

Ces chiffres sont en accord avec les estimations (transport de masse de l'ordre 10^8 m³/seconde).

Ainsi il est indispensable, dans le cas de l'Océan Antarctique, de faire intervenir la circulation verticale et d'utiliser les coordonnées sphériques et il n'est pas nécessaire d'admettre pour le coefficient l la valeur anormalement forte de 10^{10} C. G. S.

CHAPITRE VII

ÉTUDE QUANTITATIVE DES REMONTÉES D'EAUX FROIDES

1. — Introduction.

On sait l'importance du phénomène des remontées d'eaux froides ou « *Up welling* » au point de vue biologique et climatologique. Les régions où cette ascendance est particulièrement importante sont : les côtes de Californie et du Pérou pour le Pacifique, celles du Maroc et de l'Afrique du Sud pour l'Atlantique, et celles de la Somalie pour l'Océan Indien. La cause de ce phénomène est bien connue, mais en dehors d'un travail récent de M. K. HIRAKA [45], il n'existe guère d'études quantitatives sur ce sujet.

Nous supposons d'abord l'action de la turbulence latérale négligeable. Il est inutile d'employer des coordonnées sphériques, le domaine utile étant de dimensions relativement petites. Le système de coordonnées ox, y, z est orienté respectivement Sud, Est, Zénith. La côte est supposée rectiligne et parallèle à ox , soit $y = a$, et on considère un domaine du genre canal qui est défini en séparant par la pensée un canal de longueur indéfinie, de largeur a et de profondeur h le long de la côte où se produit la remontée

d'eau froide et en supposant le mouvement nul à l'extérieur de celui-ci. On admet donc que le mouvement est indépendant de x . Les équations (44) du chapitre III s'écrivent avec ces hypothèses :

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \lambda v = 0 ; \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \lambda u = g \frac{d\zeta}{dy} ;$$

$$(2) \quad \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 ;$$

où

$$(3) \quad \lambda = 2 \omega \sin \psi ;$$

ψ est la latitude moyenne du domaine envisagé, puisque l'on suppose λ constant.

Comme l'on ne tient pas compte des frottements sur les parois latérales, il est impossible d'envisager qu'il n'y ait pas de frottement sur le fond. Nous aurons donc comme conditions aux frontières :

$$(4) \quad v \Big|_{y=0,a} = 0 ;$$

ce qui entraîne (variables séparables)* :

$$(5) \quad u \Big|_{y=0,a} = 0 ; \quad \frac{d\zeta}{dy} \Big|_{y=0,a} = 0 ; \quad \tau_x \Big|_{y=0,a} = \tau_y \Big|_{y=0,a} = 0 ;$$

puis à la surface :

$$(6) \quad k \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} = \tau_x = \tau \cos \varphi ;$$

$$k \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=0} = \tau_y = \tau \sin \varphi ;$$

$$(7) \quad w \Big|_{z=0} = 0 ;$$

φ désignant l'angle que fait le vent avec l'axe ox ;

enfin, sur le fond, on a :

$$(8) \quad w \Big|_{z=-h} = 0 ;$$

dans un premier cas, on admettra que la vitesse est nulle au fond :

$$(9) \quad u \Big|_{z=-h} = v \Big|_{z=-h} = 0 ;$$

dans un second cas, on admettra que le frottement au fond est proportionnel à la vitesse sur le fond :

$$(10) \quad k \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=-h} = \varepsilon u \Big|_{z=-h} ;$$

$$k \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=-h} = \varepsilon v \Big|_{z=-h} .$$

* En toute rigueur, il faudrait, de plus, écrire que w est nulle sur les frontières $y = 0, a$; et ceci impose : $\frac{d\tau}{dy} \Big|_{y=0,a} = 0$.

La relation (2) montre qu'il existe une fonction de courant $\chi = - \int w dy$ dans le plan vertical; les lignes de courant se projettent donc dans ce plan suivant les courbes $\chi = \text{cst}$.

2. — Intégration dans l'hypothèse d'un coefficient k constant.

On obtient rapidement les solutions en posant :

$$(11) \quad \begin{aligned} Z &= u + i v; & \frac{d\zeta}{dy} &= \gamma \tau; \\ \beta &= q(1+i); & q &= \sqrt{\frac{\lambda}{2k}}. \end{aligned}$$

Les équations se combinent sous forme complexe :

$$(12) \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} - 2i q^2 Z = \frac{i g \gamma \tau}{k};$$

d'où, compte tenu des conditions frontières, les solutions :

I. — La vitesse est nulle sur le fond :

$$(13) \quad \begin{aligned} Z &= \tau \left[\frac{e^{i\varphi} \text{Sh } \beta (h+z)}{k \beta \text{Ch } \beta h} - \frac{g \gamma}{2 k q^2} \left(1 - \frac{\text{Ch } \beta z}{\text{Ch } \beta h} \right) \right]; \\ W &= \frac{d\tau}{dy} \mathcal{J} \left\{ \frac{e^{i\varphi}}{k \beta^2} \left[1 - \frac{\text{Ch } \beta (h+z)}{\text{Ch } \beta h} \right] - \frac{g \gamma}{2 k q^2} \frac{\text{Sh } \beta z}{\beta \text{Ch } \beta h} \right\}; \end{aligned}$$

où $\mathcal{J}\{\dots\}$ signifie partie imaginaire de la quantité comprise entre les accolades. Si on pose :

$$(14) \quad \begin{aligned} \mathcal{A}(z) &= \text{Ch } q z \text{ Cos } q z; & \mathcal{C}(z) &= \text{Ch } q z \text{ Sin } q z; \\ \mathcal{B}(z) &= \text{Sh } q z \text{ Sin } q z; & \mathcal{D}(z) &= \text{Sh } q z \text{ Cos } q z; \end{aligned}$$

$$(15) \quad \begin{aligned} A &= \text{Ch } q h \text{ Cos } q h; & E &= \text{Ch } 2 q h + \text{Cos } 2 q h; \\ B &= \text{Sh } q h \text{ Sin } q h; & F &= \text{Ch } 2 q h - \text{Cos } 2 q h; \\ C &= \text{Ch } q h \text{ Sin } q h; & H &= \text{Sh } 2 q h + \text{Sin } 2 q h; \\ D &= \text{Sh } q h \text{ Cos } q h; & I &= \text{Sh } 2 q h - \text{Sin } 2 q h; \end{aligned}$$

on obtient explicitement :

$$(16) \quad \begin{aligned} u &= \frac{\tau}{k q E} \left\{ [(A - B) \text{Cos } \varphi + (A + B) \text{Sin } \varphi] \mathcal{D}(h+z) \right. \\ &\quad \left. + [(A + B) \text{Cos } \varphi - (A - B) \text{Sin } \varphi] \mathcal{C}(h+z) - \frac{g \gamma}{2 q} [E - 2 A \mathcal{A}(z) - 2 B \mathcal{B}(z)] \right\}; \\ v &= \frac{\tau}{k q E} \left\{ [(A - B) \text{Sin } \varphi - (A + B) \text{Cos } \varphi] \mathcal{D}(h+z) \right. \\ &\quad \left. + [(A - B) \text{Cos } \varphi + (A + B) \text{Sin } \varphi] \mathcal{C}(h+z) + \frac{g \gamma}{q} [A \mathcal{B}(z) - B \mathcal{A}(z)] \right\}; \\ W &= \frac{d\tau}{dy} \frac{1}{k q^2 E} \left\{ (A \text{Cos } \varphi + B \text{Sin } \varphi) \mathcal{A}(h+z) + (B \text{Cos } \varphi - A \text{Sin } \varphi) \mathcal{B}(h+z) \right. \\ &\quad \left. - \frac{g \gamma}{2 q} [(A - B) \mathcal{C}(z) - (A + B) \mathcal{D}(z)] - \frac{E}{2} \text{Cos } \varphi \right\}; \\ g \gamma &= \frac{2 q}{I} [(2 A - E) \text{Cos } \varphi + 2 B \text{Sin } \varphi]. \end{aligned}$$

On peut ensuite calculer le flux ascendant par :

$$(17) \quad \Phi = \frac{1}{h} \int_{-h}^0 w \, dz = \frac{d\tau}{dy} \cdot \frac{1}{4 k q^3 h E} \left[(H - 2 q h E) \cos \varphi + I \sin \varphi - \frac{g \gamma}{q} (E - 2 A) \right].$$

Le flux est maximum pour un angle φ_0 , tel que :

$$(18) \quad \operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{I^2 - 4 B (E - 2 A)}{H \cdot I + 2 (E - 2 A)^2 - 2 q h E I}.$$

Le mouvement est ici déterminé par le paramètre $q h$.

Si $q h \ll 1$, la force de Coriolis est négligeable; il vient :

$$(19) \quad \begin{aligned} u &\rightarrow \frac{\tau}{k} (h + z) \cos \varphi; \\ v &\rightarrow \frac{\tau}{k} \left[(h + z) \sin \varphi - \frac{g \gamma}{2} (h^2 - z^2) \right]; \\ w &\rightarrow - \frac{d\tau}{dy} \frac{z}{2 k} \left[(2 h + z) \sin \varphi + g \gamma \left(h^2 - \frac{z^2}{3} \right) \right]; \\ \gamma &\rightarrow - \frac{3 \sin \varphi}{2 g h}; \\ \Phi &\rightarrow \frac{d\tau}{dy} \cdot \frac{h^2 \sin \varphi}{48 k}; \\ \varphi_0 &\rightarrow \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Si $q h \gg 1$, la force de Coriolis est importante et on a :

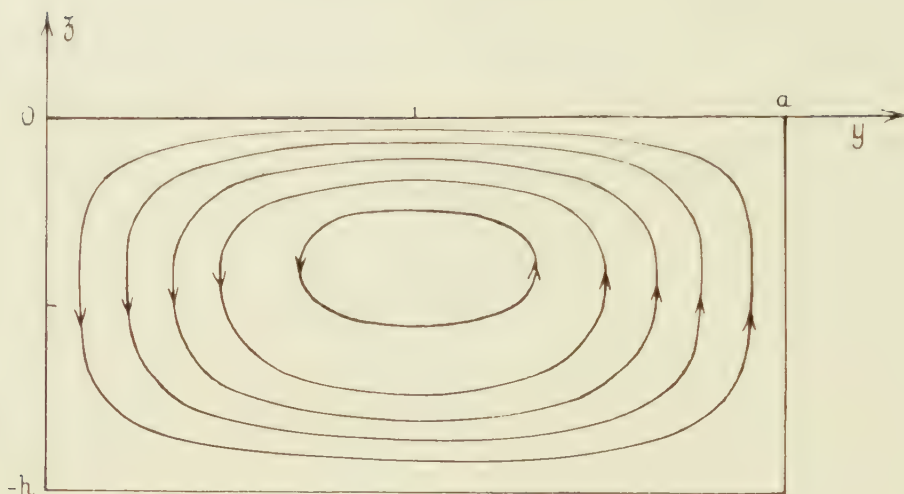
$$(20) \quad \begin{aligned} u &\rightarrow \frac{\tau}{2 k q} \left[e^{qz} \left(\cos (q z + \varphi) + \sin (q z + \varphi) \right) - \frac{g \gamma}{q} \left(1 - e^{-q(h+z)} \cos q(h+z) \right) \right]; \\ v &\rightarrow \frac{\tau}{2 k q} \left[e^{qz} \left(\sin (q z + \varphi) - \cos (q z + \varphi) \right) - \frac{g \gamma}{q} e^{-q(h+z)} \sin q(h+z) \right]; \\ w &\rightarrow \frac{d\tau}{dy} \frac{1}{2 k q^2} \left[e^{qz} \cos (q z + \varphi) - \cos \varphi - \frac{g \gamma}{2 q} e^{-q(h+z)} \left(\cos q(h+z) + \sin q(h+z) \right) \right]; \\ \gamma &\rightarrow - \frac{2 q}{g} \cos \varphi; \\ \Phi &\rightarrow \frac{d\tau}{dy} \cdot \frac{1}{4 k q^3 h} [(3 - 2 q h) \cos \varphi + \sin \varphi]; \quad \varphi_0 \rightarrow 0. \end{aligned}$$

II. — Si l'on admet que le frottement sur le fond est proportionnel à la vitesse, on obtient :

$$(21) \quad \begin{aligned} Z &= \tau \left[\frac{e^{i\varphi} \operatorname{Ch} \beta (h+z)}{k \beta \operatorname{Sh} \beta h} - \frac{g \gamma}{2 k q^2} - \frac{\varepsilon \delta e^{i\theta}}{k \beta} \cdot \frac{\operatorname{Ch} \beta z}{\operatorname{Sh} \beta h} \right]; \\ W &= \frac{d\tau}{dy} \mathcal{J} \left\{ \frac{e^{i\varphi}}{k \beta^2} \left[1 - \frac{\operatorname{Sh} \beta (h+z)}{\operatorname{Sh} \beta h} \right] + \frac{\varepsilon \delta e^{i\theta}}{k \beta^2} \cdot \frac{\operatorname{Sh} \beta z}{\operatorname{Sh} \beta h} \right\}; \end{aligned}$$

où on a posé :

$$(22) \quad Z \Big|_{z=-h} = Z_0 e^{i\theta} = \delta \tau e^{i\theta};$$

FIG. 15. — Lignes de courant $\gamma = \text{const.}$ ($\rho = 1$, $\varphi = 0$).

et il vient tous calculs faits :

$$\begin{aligned}
 (23) \quad u &= \frac{\tau}{k q F} \left\{ [(D - C) \cos \varphi + (D + C) \sin \varphi] \mathfrak{A}(h + z) \right. \\
 &\quad \left. + [(D + C) \cos \varphi + (C - D) \sin \varphi] \mathfrak{B}(h + z) - \frac{g \gamma F}{2 q} \right. \\
 &\quad \left. - \varepsilon \delta [(D - C) \cos \theta + (D + C) \sin \theta] \mathfrak{A}(z) - \varepsilon \delta [(D + C) \cos \theta + (C - D) \sin \theta] \mathfrak{B}(z) \right\}; \\
 v &= \frac{\tau}{k q F} \left\{ [(D - C) \cos \varphi + (D + C) \sin \varphi] \mathfrak{B}(h + z) - [(D + C) \cos \varphi + (C - D) \sin \varphi] \mathfrak{A}(h + z) \right. \\
 &\quad \left. - \varepsilon \delta [(D - C) \cos \theta + (D + C) \sin \theta] \mathfrak{B}(z) + \varepsilon \delta [(D + C) \cos \theta + (C - D) \sin \theta] \mathfrak{A}(z) \right\}; \\
 w &= \frac{d\tau}{dy} \frac{1}{k q^3 F} \left\{ (D \cos \varphi + C \sin \varphi) \mathfrak{W}(h + z) + (C \cos \varphi - D \sin \varphi) \mathfrak{C}(h + z) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{F}{2} \cos \varphi - \varepsilon \delta (D \cos \theta + C \sin \theta) \mathfrak{W}(z) - \varepsilon \delta (C \cos \theta - D \sin \theta) \mathfrak{C}(z) \right\}; \\
 \operatorname{tg} \theta &= \frac{\varepsilon}{2 k q F + \varepsilon I} \left[2 \operatorname{tg} \varphi (D - C) + H - 2(D + C) \right]; \quad \delta = \frac{\cos \varphi}{\varepsilon \cos \theta}; \\
 g \gamma &= \frac{2 q}{F} \left\{ \cos \varphi \left[D - C - \frac{(2 k q F + \varepsilon I)}{2 \varepsilon} - \frac{\varepsilon H}{2} \cdot \frac{(H - 2 D - 2 C)}{2 k q F + \varepsilon I} \right] \right. \\
 &\quad \left. + \sin \varphi \left[D + C - \frac{H(D - C)}{2 k q F + \varepsilon I} \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Le flux ascendant est donné par :

$$\begin{aligned}
 (24) \quad \Phi &= \frac{1}{h} \int_{-h}^0 w \, dz \\
 &= \frac{d\tau}{dy} \frac{1}{4 k q^3 h F} \left[(I + 2 C - 2 D) (\cos \varphi + \varepsilon \delta \cos \theta) + (H - 2 D - 2 C) (\sin \varphi + \varepsilon \delta \sin \theta) - 2 q h F \cos \varphi \right].
 \end{aligned}$$

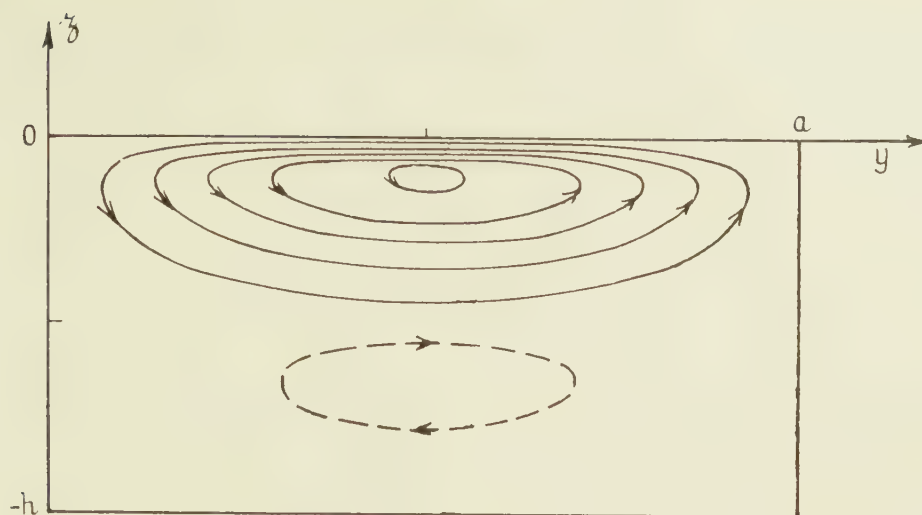


FIG. 16. — Lignes de courant $\chi = \text{const.}$ ($\rho = 1$, $\varphi = -\frac{\pi}{2}$).

Le mouvement est encore caractérisé par le paramètre qh .

En prenant comme données numériques :

$$\psi = 27^\circ; \lambda = 6.10^{-5}; k = 330 \text{ C. G. S.};$$

$$a = 200 \text{ km}; h = 200 \text{ m};$$

$$\tau = \tau_0 \sin \frac{\pi y}{a}; \tau_0 = 1 \text{ C. G. S.};$$

on obtient, dans le cas où la vitesse est nulle au fond, les résultats suivants (voir tableau VI et fig. 15, 16).

Si $\varphi = 0$ et $-\frac{\pi}{2}$, le maximum de $u = 15 \text{ cm/seconde}$ et 5 cm/seconde ;

— — — $v = 5 \text{ cm/seconde}$ et 5 cm/seconde ;

— — — $w = 2,4 \text{ m/jour}$ et $0,7 \text{ m/jour}$,

le flux ascendant total par kilomètre de côte est : $-1,8 \cdot 10^3 \text{ m}^3/\text{seconde}$ et $-5,10^2 \text{ m}^3/\text{seconde}$. L'angle φ_0 , correspondant au flux ascendant maximum, est d'environ -6° .

3. — Intégration pour k fonction de z .

On sait que le coefficient n'est pas en général constant, qu'il dépend de la stabilité $E = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z}$ (ρ désigne la densité) et qu'il doit diminuer au voisinage du fond ou de la thermocline, si elle existe. En effet, le coefficient k doit varier en raison inverse de la stabilité. FJELSTAD a proposé pour k la forme suivante :

$$(25) \quad k = k_0 \left(1 - \frac{z}{h}\right)^n \frac{1}{1 + a E};$$

où $n = 1/3$ ou $1/4$ et $a \sim 5,10^6 \text{ C. G. S.}$

Les calculs sont évidemment compliqués, même en admettant des lois simples pour $k(z)$. Nous allons indiquer une méthode de calcul pour deux hypothèses simples sur la forme de k ; celle-ci n'est valable que si $qh > 3$, c'est-à-dire si la profondeur est suffisamment grande (de l'ordre de 100 m) :

hypothèse 1 :

$$(26) \quad k = k_1 \left(1 - \alpha \frac{z}{h} \right); \quad \alpha = 0,90;$$

hypothèse 2 :

$$(27) \quad k = k_2 e^{-\alpha \frac{z}{h}}; \quad \alpha = 2,3.$$

Nous supposons la vitesse nulle au fond; au lieu de l'équation (12) on a ici :

$$(28) \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial Z}{\partial z} \right) - i \lambda Z = i g \gamma \tau.$$

On obtiendra la solution de l'équation homogène en posant :
dans l'hypothèse 1 :

$$(29) \quad \sigma = r \left(1 - \alpha \frac{z}{h} \right)^{\frac{1}{2}}; \quad r = qh; \quad q = \sqrt{\frac{\lambda}{2k_1}};$$

$$Z = e^{\sigma} \cdot \sigma^{-\frac{1}{2}} \Psi(\sigma);$$

dans l'hypothèse 2 :

$$(30) \quad \sigma = r e^{\frac{\alpha z}{2h}}; \quad r = qh; \quad q = \sqrt{\frac{\lambda}{2k_2}};$$

$$Z = e^{\sigma} \cdot \sigma^{+\frac{1}{2}} \Psi(\sigma).$$

La relation (28), sans second membre, devient alors :

$$(31) \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \sigma^2} + 2 \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma} + \Psi \left(1 - \frac{8i}{\alpha^2} - \frac{\beta}{\sigma^2} \right) = 0;$$

avec $\beta = -\frac{1}{4}$ dans le premier cas, $\beta = +\frac{3}{4}$ dans le second cas ; σ reste supérieur à un si $qh > 3$; on peut donc, pour résoudre (31), effectuer un calcul d'approximations successives, soit :

$$(32) \quad \Psi = \Psi_0 + \Psi_1 + \dots;$$

et :

$$(33) \quad \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial \sigma^2} + 2 \frac{\partial \Psi_0}{\partial \sigma} + \Psi_0 \left(1 - \frac{8i}{\alpha^2} \right) = 0;$$

$$\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial \sigma^2} + 2 \frac{\partial \Psi_1}{\partial \sigma} + \Psi_1 \left(1 - \frac{8i}{\alpha^2} \right) - \frac{\beta}{\sigma^2} \Psi_0 = 0;$$

.....

on a pour solutions :

$$(34) \quad \begin{aligned} \Psi_0 &= A e^{\omega_1 \sigma} + B e^{\omega_2 \sigma} ; \\ \omega_1 &= -1 + \frac{2}{\alpha} (1 + i) ; \\ \omega_2 &= -1 - \frac{2}{\alpha} (1 + i) ; \end{aligned}$$

puis en négligeant les termes en σ^{-2} ;

$$(35) \quad \Psi_1 = A e^{\omega_1 \sigma} \left[-\frac{\alpha \beta}{4(1+i)\sigma} \dots \dots \right] + B e^{\omega_2 \sigma} \left[\frac{\alpha \beta}{4(1+i)\sigma} \dots \dots \right] ;$$

d'où la solution homogène approchée :

$$(36) \quad \Psi = A e^{\omega_1 \sigma} \left[1 - \frac{\alpha \beta}{4(1+i)\sigma} \right] + B e^{\omega_2 \sigma} \left[1 + \frac{\alpha \beta}{4(1+i)\sigma} \right] ;$$

L'intégrale complète de (28) s'obtient alors en ajoutant $-\frac{g \gamma \tau}{\lambda}$ à l'intégrale générale, et les conditions aux frontières permettent de déterminer les constantes. Nous avons effectué les calculs en vue d'en comparer les résultats avec ceux obtenus en supposant le coefficient $k = k_0$ constant. Nous avons donc choisi les valeurs de k_1 et de k_2 , telles que :

$$(37) \quad \int_{-h}^0 k(z) dz = h k_0.$$

Soit avec $k_0 = 330$ C. G. S., $k_1 = 600$; et $k_2 = 840$; les autres données numériques étaient :

$\psi = 27^\circ$ d'où $\lambda = 6.10^{-5}$; et $h = 200$ m.

Les résultats des calculs montrent que les vitesses diffèrent peu de celles correspondant au coefficient $k = k_0$, sauf en surface où elles sont plus faibles (10 à 30 %).

4. — Influence du courant de densité.

Supposons qu'il y ait un champ permanent de densité, tel que :

$$(38) \quad \rho = \rho_0 [1 - \eta(y, z)] ;$$

où η est petit ($\sim 10^{-3}$) et ρ_0 constant ~ 1 . En admettant toujours que la pression soit sensiblement la pression hydrostatique :

$$(39) \quad p = p_0 + g \int_z^{\zeta} \rho dz ;$$

on a (η séparable) :

$$(40) \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \neq g \frac{d\zeta}{dy} - g \int_z^{\zeta} \frac{\partial \eta}{\partial y} dz.$$

Supposons que l'on ait, pour la force d'entraînement du vent et pour la fonction η , les expressions :

$$(41) \quad \tau = \tau_0 \sin \frac{\pi y}{a}; \quad \eta = \eta_0 \left(2 + \cos \frac{\pi y}{a} \right) \cos \frac{\pi z}{2h};$$

on a donc maintenant pour second membre de la seconde relation (1) :

$$(42) \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = g \frac{d\zeta}{dy} = \frac{2gh\eta_0}{a} \sin \frac{\pi y}{a} \sin \frac{\pi z}{2h};$$

et si l'on pose :

$$(43) \quad Z = u + iv; \quad \beta = q(1+i); \quad q = \sqrt{\frac{\lambda}{2k}};$$

$$\frac{d\zeta}{dy} = \gamma \tau; \quad g \frac{2h\eta_0}{a} = v \tau_0;$$

on obtient, au lieu de (12), la relation :

$$(44) \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} - 2i q^2 Z = \frac{i g \gamma \tau}{k} - \frac{i v \tau}{k} \sin \frac{\pi z}{2h}.$$

Et la solution correspondant au cas où la vitesse est nulle sur le fond :

$$(45) \quad Z = \tau \left[\frac{e^{i\varphi}}{k\beta} \frac{\text{Sh } \beta(h+z)}{\text{Ch } \beta h} - \frac{g\gamma}{2kq^2} \left(1 - \frac{\text{Ch } \beta z}{\text{Ch } \beta h} \right) - \frac{v e^{i\theta} \pi}{2k\beta q^2 2h} \frac{\text{Sh } \beta(h+z)}{\text{Ch } \beta h} + \frac{v e^{i\theta}}{2kq^2} \left(\sin \frac{\pi z}{2h} + \frac{\text{Ch } \beta z}{\text{Ch } \beta h} \right) \right];$$

$$W = \frac{d\tau}{dy} \mathcal{J} \left\{ \frac{e^{i\varphi}}{k\beta^2} \left[1 - \frac{\text{Ch } \beta(h+z)}{\text{Ch } \beta h} \right] - \frac{g\gamma}{2kq^2} \frac{\text{Sh } \beta z}{\beta \text{Ch } \beta h} - \frac{v e^{i\theta}}{2k\beta^2 q^2} \frac{\pi}{2h} \left[1 - \frac{\text{Ch } \beta(h+z)}{\text{Ch } \beta h} \right] - \frac{v e^{i\theta}}{2kq^2} \left[\frac{2h}{\pi} \left(1 - \cos \frac{\pi z}{2h} \right) + \frac{\text{Sh } \beta z}{\beta \text{Ch } \beta h} \right] \right\};$$

$$e^{i\theta} = \frac{1}{1 - \frac{i\pi^2}{8q^2 h^2}}.$$

Cette solution peut être considérée comme la somme de deux solutions : $Z = Z_1 + Z_2$, $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$; Z_1 , γ_1 , désignent la solution déjà obtenue (16) et Z_2 , γ_2 celle dépendant des termes en v . Il vient en effectuant les calculs :

$$(46) \quad u_2 = - \frac{v \pi \tau}{4k q^3 h E} \left\{ [(A-B) \cos \theta + (A+B) \sin \theta] \mathcal{O}(h+z) + [(A+B) \cos \theta - (A-B) \sin \theta] \mathcal{C}(h+z) \right\}$$

$$+ \frac{v \pi \tau}{2k q^3 E} \left[E \cos \theta \left(\sin \frac{\pi z}{2h} - 1 \right) + 2(A \cos \theta + B \sin \theta) \mathcal{A}(z) + 2(B \cos \theta - A \sin \theta) \mathcal{B}(z) \right];$$

$$v_2 = - \frac{v \pi \tau}{4k q^3 h E} \left\{ [(A-B) \sin \theta - (A+B) \cos \theta] \mathcal{O}(h+z) + [(A-B) \cos \theta + (A+B) \sin \theta] \mathcal{C}(h+z) \right\}$$

$$+ \frac{v \pi \tau}{2k q^3 E} \left[E \sin \theta \left(\sin \frac{\pi z}{2h} - 1 \right) + 2(A \sin \theta - B \cos \theta) \mathcal{A}(z) + 2(A \cos \theta + B \sin \theta) \mathcal{B}(z) \right];$$

$$\begin{aligned}
w_3 = & -\frac{\nu \pi}{4 k q^4 h E} \frac{d\tau}{dy} \left[(A \cos \theta + B \sin \theta) \mathcal{A}(h+z) + (B \cos \theta - A \sin \theta) \mathcal{B}(h+z) - \frac{E}{2} \cos \theta \right] \\
& - \frac{\nu}{2 k q^3 E} \frac{d\tau}{dy} \left\{ \frac{2 q h E}{\pi} \sin \theta \left(1 - \cos \frac{\pi z}{2 h} \right) + [(A - B) \sin \theta - (A + B) \cos \theta] \mathcal{D}(z) \right. \\
& \quad \left. + [(A - B) \cos \theta + (A + B) \sin \theta] \mathcal{C}(z) \right\}; \\
g \gamma_2 = & -\frac{\nu}{l} \left[\cos \theta \left(1 + \frac{\pi}{2 q h} (2 A - E) \right) + \sin \theta \left(\frac{4 q h E}{\pi} - H + \frac{\pi B}{q h} \right) \right];
\end{aligned}$$

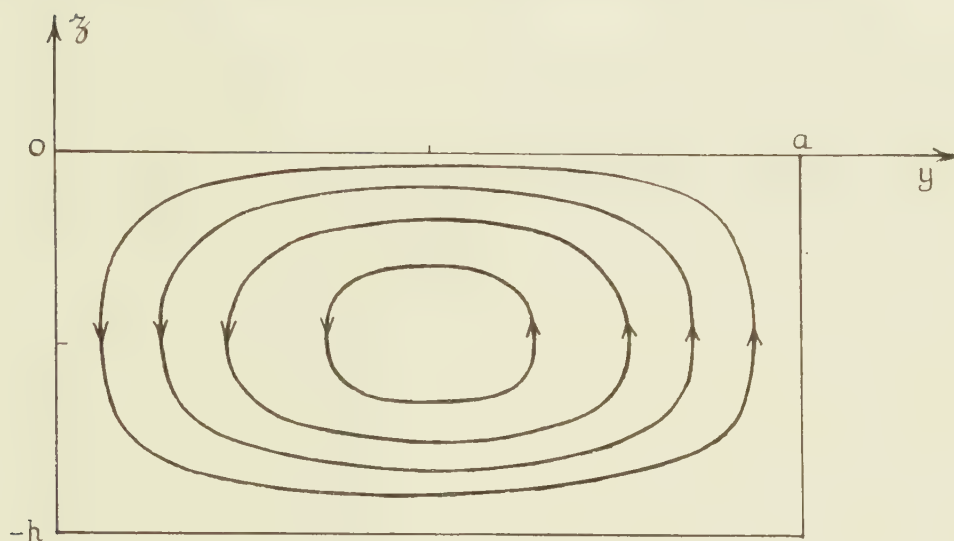


FIG. 17. — Lignes de courant $\chi = \text{const.}$ ($\rho(y, z)$, $\varphi = 0$).

de même, le flux ascendant $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$; Φ_1 est donné par (17) et :

$$\begin{aligned}
(47) \quad \Phi_2 = & \frac{1}{h} \int_{-h}^0 w_2 dz = \\
& -\frac{d\tau}{dy} \frac{\nu}{8 k q^3 h^2 E} \left\{ \cos \theta \left[q h (E - 4 A) + H \right] + \sin \theta \left[1 - 4 B q h + \frac{8 q^3 h^3}{\pi} \left(1 - \frac{2}{\pi} \right) \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Quant à l'angle φ_0 , correspondant au minimum de Φ , il est toujours déterminé par (18).

Le mouvement dépend du paramètre qh et on calcule facilement les formules correspondantes aux cas limites $qh \ll 1$ et $qh \gg 1$. En prenant les données numériques du paragraphe 2 plus la valeur $\eta_0 = \frac{1}{3} \cdot 10^{-3}$ C. G. S. on obtient, lorsque la vitesse est nulle sur le fond, les résultats suivants (voir tableau 7 et fig. 17, 18) :

Si $\varphi = 0$; le maximum de $u = 24$ cm/seconde;

celui de $v = 3,6$ cm/seconde;

celui de $w = 1,8$ m/jour;

et le flux ascendant total par kilomètre de côte est : $1,3 \cdot 10^3$ m³/seconde.

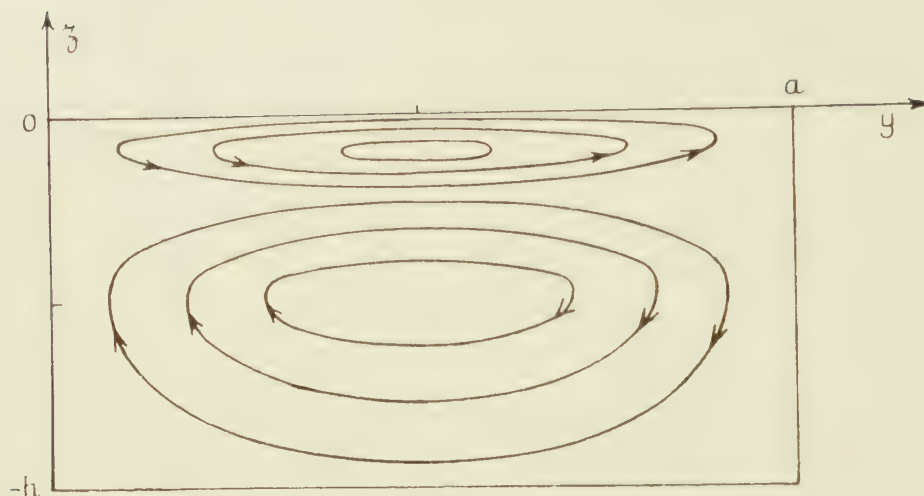


FIG. 18. — Lignes de courant $\chi = \text{const.}$ $\left(\rho(y, z), \varphi = -\frac{\pi}{2} \right)$.

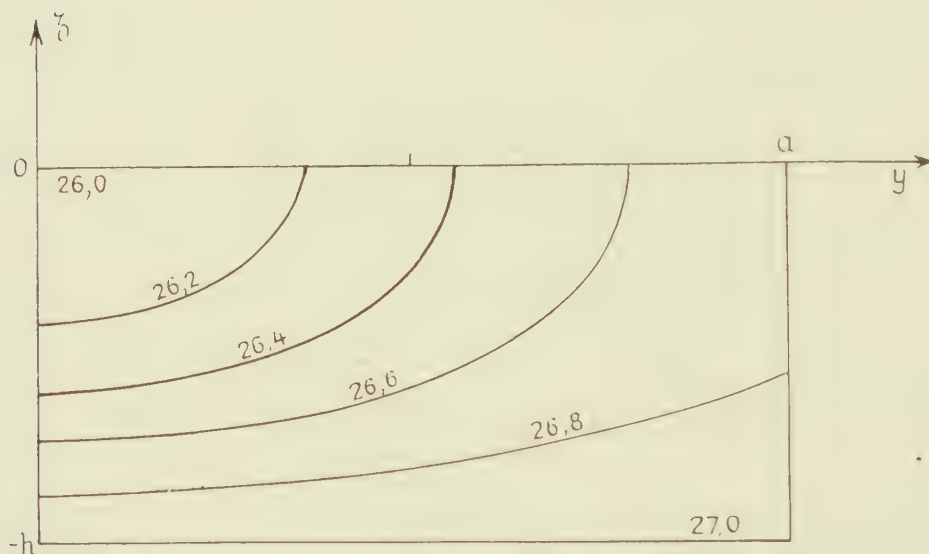


FIG. 19. — Isopycnés adoptées $(\rho - 1) \cdot 10^3$.

Si $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, le maximum de $u = 4$ cm/seconde;

celui de $v = 3,6$ cm/seconde;

celui de $w = 0,5$ m/jour;

et le flux ascendant total par kilomètre de côte est : $3,2 \cdot 10^2$ m³/seconde.

La comparaison de ces résultats et de ceux correspondant à l'hypothèse $\rho = \text{cst}$ (tableau 6, 7) montre bien l'importance des courants de densité dans les remontées d'eaux froides. Sur la figure 19, nous avons représenté le champ de densité adopté dans

nos calculs, et sur les figures 20 à 25, des exemples de champs de densité observés (coupes normales à la côte). Signalons, enfin, que les évaluations de Sverdrup [41] donnent respectivement pour u , v , w les valeurs : 11 cm/seconde, 3 cm/seconde, 1,7 m/jour.

5. — Action du frottement latéral.

Si l'on fait intervenir la turbulence latérale à l'aide d'un coefficient l constant, les équations (1) sont remplacées par

$$(48) \quad l \frac{\partial^3 u}{\partial y^2} + k \frac{\partial^3 u}{\partial z^2} + \lambda v = 0; \quad l \frac{\partial^3 v}{\partial y^2} + k \frac{\partial^3 v}{\partial z^2} - \lambda u = g \frac{d\zeta}{dy}.$$

Nous supposons qu'il y a frottement sur les frontières latérales (vitesse nulle sur celles-ci). Les conditions aux frontières sont les mêmes qu'au paragraphe I; mais on peut envisager, en plus, le cas où il n'y a pas de frottement sur le fond :

$$(49) \quad k \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=-h} = 0; \quad k \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=-h} = 0;$$

groupons les deux équations (48) sous forme complexe, on a :

$$(50) \quad l \frac{\partial^3 Z}{\partial y^2} + k \frac{\partial^3 Z}{\partial z^2} - i \lambda Z = i g \frac{d\zeta}{dy}; \quad Z = u + i v;$$

puis l'équation de continuité (2) donne :

$$(51) \quad w = - \int \mathcal{J} \left\{ \frac{\partial Z}{\partial y} \right\} dz.$$

Effectuons les développements suivants qui satisfont aux conditions aux frontières :

$$(52) \quad \begin{aligned} Z &= \sum_n Z_n P_n(y); \\ \tau &= \sum_n \tau_n P_n(y); \\ \frac{d\zeta}{dy} &= \sum_n \gamma_n \tau_n P_n(y); \end{aligned} \quad \begin{aligned} w &= \sum_n w_n \frac{a}{n\pi} \frac{dP_n}{dy}; \\ P_n(y) &= \sin \frac{n\pi y}{a}. \end{aligned}$$

Les relations (50) (51) donnent :

$$(53) \quad \frac{d^2 Z_n}{dz^2} - (x^2 + 2i q^2) Z_n = \frac{i g \gamma_n}{k} \tau_n;$$

avec :

$$(54) \quad w_n = - \frac{n\pi}{a} \int \mathcal{J} \left\{ Z_n \right\} dz;$$

$$(55) \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{a} \sqrt{\frac{l}{k}}; \quad q = \sqrt{\frac{\lambda}{2k}}.$$

Si on pose maintenant :

$$(56) \quad \beta_n = q \left(v_n + \frac{i}{v_n} \right); \quad v_n = \sqrt{r_n^2 + \sqrt{1 + r_n^2}}; \quad r_n = \frac{\alpha_n}{q \sqrt{2}}.$$

on obtient aisément les solutions suivantes :

I. — S'il y a frottement sur le fond :

$$(57) \quad \begin{aligned} Z_n &= \tau_n \left[\frac{e^{l\varphi} \text{Sh } \beta_n (h+z)}{k \beta_n \text{Ch } \beta_n h} - \frac{g \gamma_n}{2 k q^2 (1-i r_n^2)} \left(1 - \frac{\text{Ch } \beta_n z}{\text{Ch } \beta_n h} \right) \right]; \\ W_n &= -\frac{n \pi}{a} \tau_n \mathcal{J} \left\{ \frac{e^{l\varphi}}{k \beta_n^2} \left[\frac{\text{Ch } \beta_n (h+z)}{\text{Ch } \beta_n h} - 1 \right] - \frac{g \gamma_n}{2 k q^2 (1-i r_n^2)} \left(z - \frac{\text{Sh } \beta_n z}{\beta_n \text{Ch } \beta_n h} \right) \right\}. \end{aligned}$$

II. — Si le frottement est nul sur le fond :

$$(58) \quad \begin{aligned} Z_n &= \tau_n \left[\frac{e^{l\varphi} \text{Ch } \beta_n (h+z)}{k \beta_n \text{Sh } \beta_n h} - \frac{g \gamma_n}{2 k q^2 (1-i r_n^2)} \right]; \\ W_n &= -\frac{n \pi}{a} \tau_n \mathcal{J} \left\{ \frac{e^{l\varphi}}{k \beta_n^2} \left[\frac{\text{Sh } \beta_n (h+z)}{\text{Sh } \beta_n h} - 1 \right] - \frac{g \gamma_n}{2 k q^2 (1-i r_n^2)} z \right\}. \end{aligned}$$

Le mouvement est évidemment caractérisé par les paramètres r_n et $\beta_n h$. Supposons la force d'entraînement du vent τ donnée par :

$$(59) \quad \tau = \tau_1 \sin \frac{\pi y}{a}.$$

Il ne subsiste que le premier terme dans les développements (52).

Si $r_1 \ll 1$, le frottement latéral est négligeable; $\beta_1 \rightarrow q(1+i)$ et on retrouve les solutions précédentes qui dépendent du paramètre qh .

Si $r_1 \gg 1$, la force de Coriolis est négligeable $\beta_1 \rightarrow \alpha_1$ et le mouvement est caractérisé par le paramètre $\alpha_1 h$. Le coefficient l est de l'ordre de $5,10^7$ C. G. S., donc $r_1 \sim 1,4 \cdot 10^{-1}$, et le frottement latéral est négligeable.

Il n'en n'est pas de même pour les termes d'indice $n > 1$ dans les développements (52). K. HIDAKA [45] vient de donner une intéressante méthode de calcul des remontées d'eaux froides, compte tenu des vitesses verticales et du frottement latéral. Celle-ci est basée sur l'emploi d'intégrales de Fourier. Mais on ne peut effectuer complètement le calcul que numériquement, si bien qu'il n'est guère possible de mettre en évidence les paramètres caractéristiques du mouvement.

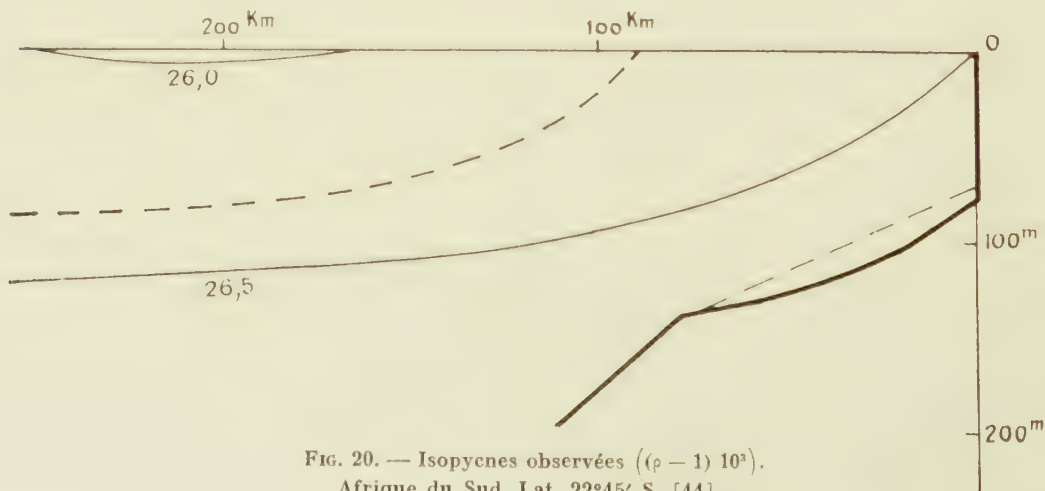


FIG. 20. — Isopycnés observées $(\rho - 1) 10^3$.
Afrique du Sud. Lat. $22^{\circ}45'$ S. [44].

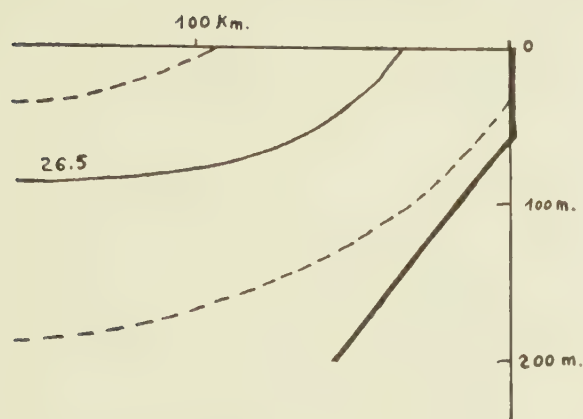


FIG. 21. — Isopycnés observées $((\rho - 1) 10^3)$.
Afrique du Sud. Lat. $25^{\circ}12'$ S. [44].

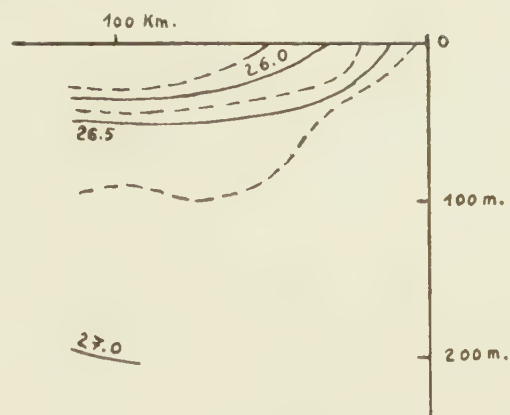


FIG. 22. — Isopycnés observées $((\rho - 1) 10^3)$.
Maroc. Lat. $32^{\circ}14'$ N. [42].

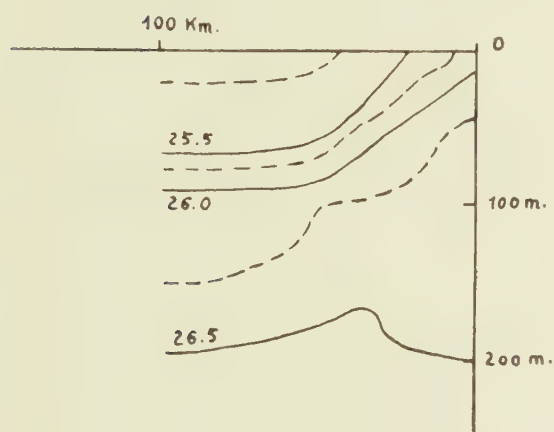


FIG. 23. — Isopycnés observées $((\rho - 1) 10^3)$.
Amérique du Sud. Lat. $27^{\circ}05'$ S. [40].

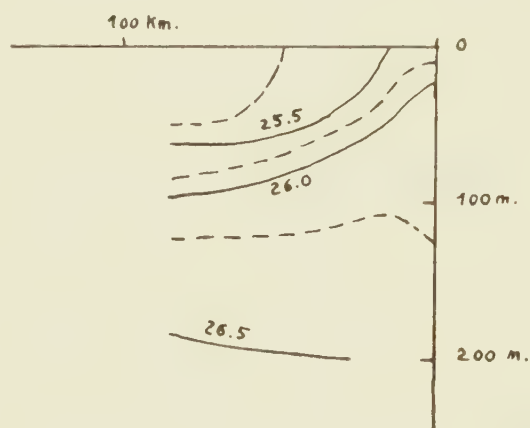


FIG. 24. — Isopycnés observées $((\rho - 1) 10^3)$.
Amérique du Sud. Lat. $23^{\circ}20'$ S. [40].

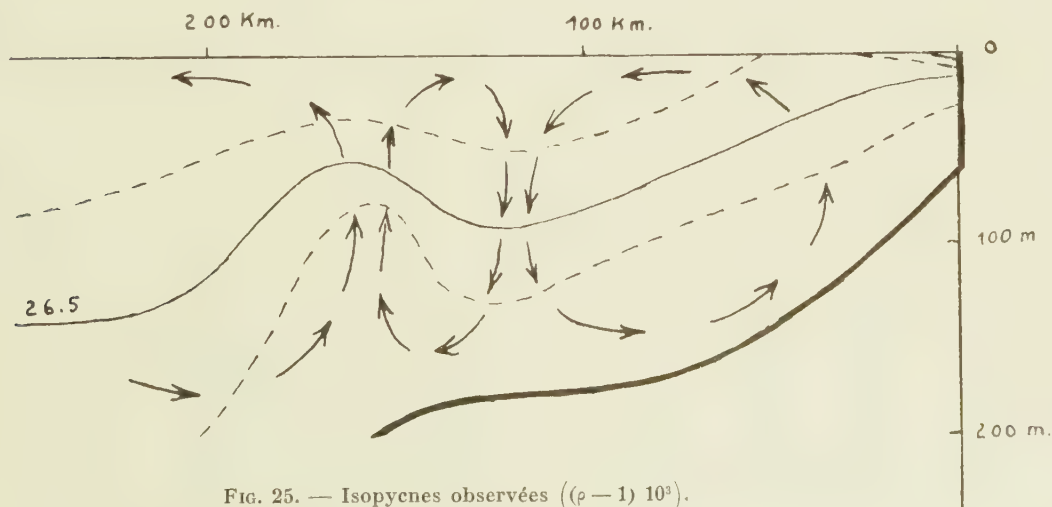


FIG. 25. — Isopycnés observées $((\rho - 1) 10^3)$.
Afrique du Sud. Lat. $28^{\circ}40'$ S. [44].

TABLEAU VI

z/h	u/τ	v/τ	$\pi w/a \frac{d\tau}{d\lambda}$
Densité constante $\rho = 1$; $\varphi = 0$			
0	+15,0	-5,0	0
0,1	+10,7	-3,8	-1,4 10^{-3}
0,2	+9,2	-2,0	-2,2 "
0,3	+9,0	-0,7	-2,6 "
0,4	+9,6	-0,1	-2,8 "
0,5	+10,2	+0,3	-2,7 "
0,6	+10,6	+0,8	-2,6 "
0,7	+10,3	+1,7	-2,2 "
0,8	+8,9	+2,8	-1,5 "
0,9	+5,5	+3,1	-0,6 "
1,0	0	0	0
Densité constante $\rho = 1$; $\varphi = -\frac{\pi}{2}$			
0	-5,0	-5,0	0
0,1	-3,8	-0,7	-0,8 10^{-3}
0,2	-2,0	+1,0	-0,7 "
0,3	-0,6	+0,6	-0,4 "
0,4	0	+0,3	-0,2 "
0,5	+0,2	+0,1	-0,0 "
0,6	+0,2	-0,0	0,0 "
0,7	+0,1	0,0	0,0 "
0,8	0,0	0,0	0,0 "
0,9	0,0	0,0	0,0 "
1,0	0	0	0

TABLEAU VII

z/h	u/τ	v/τ	$\pi w/a \frac{d\tau}{d\lambda}$
Densité variable $\rho(y, z)$; $\varphi = 0$			
0	+24,0	-3,6	0
0,1	+19,2	-2,7	-1,1 10^{-3}
0,2	+16,4	-1,4	-1,6 "
0,3	+14,8	-0,7	-1,9 "
0,4	+13,7	-0,2	-2,1 "
0,5	+12,9	0	-2,1 "
0,6	+12,1	+0,5	-2,1 "
0,7	+10,9	+1,3	-1,8 "
0,8	+8,9	+2,3	-1,2 "
0,9	+5,3	+2,6	-0,4 "
1,0	0	0	0
Densité variable $\rho(x, y)$; $\varphi = -\frac{\pi}{2}$			
0	+4,0	-3,6	0
0,1	+4,7	+0,4	-0,5 10^{-3}
0,2	+5,2	+1,6	-0,1 "
0,3	+5,2	+0,6	+0,3 "
0,4	+4,1	+0,2	+0,5 "
0,5	+2,9	-0,2	+0,6 "
0,6	+1,7	-0,3	+0,5 "
0,7	+0,7	-0,4	+0,4 "
0,8	0	-0,5	+0,3 "
0,9	-0,2	-0,5	+0,2 "
1,0	0	0	0

BIBLIOGRAPHIE

CHAPITRE I

1. LAMÉ (M. G.). — *Leçons sur les coordonnées curvilignes*, 1859.
2. BASSET (A. B.). — *A treatise of hydrodynamics*, 1888.
3. JEFFERY (G. B.). — The equations of motion of viscous fluid. *Phil. Mag.*, 6, 29, 1915, p. 445.
4. LAMB (H.). — *Hydrodynamics*, 1932.
5. WATANABE (S.). — The equations of motion of a viscous fluid accompanied by microgyrostatic field. *Geoph. Mag.*, 5, 1932.
6. ERTEL (H.). — *Methoden und Probleme der dynamischen Meteorologie*, 1938.
7. MILNE-THOMSON (L. M.). — *Theoretical hydrodynamics*, 1949.
8. ARAKAWA (H.). — Transformation of the equations of motion in dynamical meteorology to orthogonal curvilinear coordinates. *Papers Meteo. Geoph.*, 1, 1, 1950.
9. LICHNEROWICZ (A.). — *Eléments de calcul tensoriel*, 1951.

CHAPITRE II

10. ERTEL (H.). — Tensorielle Theorie der Turbulenz. *Ann. Hydro. Mar. Météo.*, 65, 1937, p. 193.
11. ISACKER (J. van). — Contribution à l'étude des fluides incompressibles en mouvement turbulent. *Inst. Roy. météo. Belg. Mém.*, 43, 1951.

CHAPITRE III

12. SVERDRUP (H. U.). — Lateral mixing in the deep water of the south Atlantic ocean. *Journ. Mar. Res.*, 2, 3, 1939, p. 195.
13. MONTGOMERY (R. B.). — Ein Versuch den verticalen und seitlichen Austausch in der Tiefe der Sprungschicht im äquatorialen atlantischen Ozean zu bestimmen. *Ann. Hydro. Mar. Météo.*, 5, 1939, p. 242.
14. MONTGOMERY (R. B.) et PALMEN (E.). — Contribution to the question of the equatorial counter current. *Journ. Mar. Res.*, 3, 2, 1940, p. 112.
15. PROUDMAN (J.). — *Dynamical oceanography*, 1953.
16. SAINT-GULY (B.). — Note sur la dénivellation et la circulation induites par le vent dans les mers fermées ou les lacs. *Bull. Inf. C. O. E. C.*, 7, 5, 1955, p. 207.

CHAPITRE IV

17. EKMAN (V. W.). — On the influence of the earth's rotation on ocean currents. *Ark. Mat. Astr. Fys.*, 2, 2, 1905.
18. GOLDSBROUGH (G. R.). — On ocean currents produced by winds. *Proc. Roy. Soc. Lond. A.*, 148, 47, 1935.
19. ROSSBY (C. G.) et MONTGOMERY (R. B.). — On the momentum transfer at the sea-surface. *Papers Phys. Ocean. Meteo.*, 4, 3, 1936.
20. ROSSBY (C. G.). — Dynamics of steady currents in the light of experimental fluid mechanics. *Papers Phys. Ocean. Meteo.*, 5, 1, 1936.
21. WEATHER BUREAU. — *Atlas of climatic charts of the oceans*. Washington, 1938.
22. SVERDRUP (H. U.). — Wind driven currents in a baroclinic ocean with application to the equatorial currents of the eastern Pacific. *N. Y. Acad. Sci.*, 33, 11, 1947, p. 318.

23. SVERDRUP (H. U.), JOHNSON (M. W.) et FLEMING (R. H.). — *The oceans*, 1946.
24. REID (R. O.). — The equatorial currents of the eastern Pacific as maintained by the stress of the wind. *Journ. Mar. Res.*, 7, 2, 1948, p. 74.
25. STOMMEL (H.). — The Westward intensification of wind driven ocean currents. *Trans. Am. Geoph. Un.*, 29, 2, 1948, p. 202.
26. MUNK (W. H.). — On the wind driven ocean circulation. *Jour. Meteo.*, 7, 2, 1951, p. 79.
27. MUNK (W. H.), GROVES (C. W.) et CARRIER (G. F.). — Note on the dynamics of the Gulf stream. *Journ. Mar. Res.*, 9, 3, 1950, p. 218.
28. HIDAKA (K.). — Drift-current in an enclosed ocean. III. *Geoph. Notes*, 4, 3, 1951.
29. SAITO (Y.). — On the theory of ocean currents driven by winds in an anisotropic ocean. *Journ. Tokyo Univ. Fish.*, 38, 2, 1951, p. 87.
30. SHTOKMAN (V. B.). — Application de la méthode des courants intégraux au calcul de la circulation provoquée par un vent irrégulier dans une mer de forme elliptique. *Isvest. Akad. Nauk, ser. Geoph.*, 5, 57, 1952.
31. MIYAZAKI (M.). — Notes on the theory of the wind driven oceanic circulation. *Ocean. Mag.*, 4, 2, 1952.
32. WEEMINK (M. P. H.) et GROEN (P.). — On the computation of ocean surface current velocities in the equatorial regions from wind data. *Proc. Konink. Nederl. Akad. Wet.*, sér. B, 55, 3, 1952, p. 239.

CHAPITRE V

33. RAPPLEYE (H. S.). — The 1929 ajustement of the level net. *Milit. Engin.*, 24, 138, 1932, p. 576.
34. MONTGOMERY (R. B.). — Sea level difference between Key West and Miami. *Journ. Mar. Res.*, 4, 1, 1941, p. 32.
35. SAINT-GUILY (B.). — Sur le niveau moyen de la côte Atlantique de l'Amérique du Nord. *C. R. Acad. Sci.*, 239, 6, 506.

CHAPITRE VI

36. HIDAKA (K.) et TSUCHIYA (M.). — On the Antarctic circumpolar current. *Journ. Mar. Res.*, 12, 2, 1953, p. 214.
37. PRIVETT (D. W.). — Some new wind charts for the south Atlantic ocean. *Weather*, 9, 1, 1954, p. 9.

CHAPITRE VII

38. NOMITSU (T.). — A theory of the rising stage of the drift current in the ocean. *Mem. Coll. Sci. Imp. Univ.*, 16, 2-3-4-5, 1933.
39. NOMITSU (T.). — Coastal effect upon the ocean current. *Mem. Coll. Sci. Imp. Univ.*, 17, 3-5, 1934.
40. *Discovery reports*, 13, 1936.
41. SVERDRUP (H. U.). — On the process of upwelling. *Journ. Mar. Res.*, 1, 2, 1937, p. 155.
42. *Annales hydrographiques*, 3, 95, 1952.
43. PROUDMAN (J.). — *Dynamical Oceanography*, 1953.
44. *Discovery reports*, 26, 1953.
45. HIDAKA (K.). — A contribution to the theory of upwelling and coastal currents. *Trans. Am. Geoph. Un.*, 35, 3, 1954, p. 431.

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté :

OSCILLATIONS PROPRES D'UN LIQUIDE PESANT DANS UN VASE EN ROTATION

VU ET APPROUVÉ :

Paris, le 9 décembre 1955.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

J. PÉRÈS.

VU ET PERMIS D'IMPRIMER :

Le Recteur de l'Académie de Paris,

JEAN SARRAILH.

